Noyau parfait et rang de Cantor-Bendixson : étude du groupe de Baumslag

Sasha Bontemps

Stage de M2 effectué sous la direction de Damien Gaboriau (UMPA, ENS de Lyon)

Résumé

Dans ce rapport, on étudie l'espace des sous-groupes de certains groupes dénombrables. On donne une réponse au problème ouvert suivant : existe-t-il un groupe de présentation finie et de rang de Cantor-Bendixson infini ? On commence par étudier l'exemple du groupe de l'allumeur de réverbères, qui fournit un exemple de rang de Cantor-Bendixson ω (mais de présentation infinie) en suivant l'approche de Bowen, Grigorchuk et Kravchenko. On montre ensuite que le groupe de Baumslag, généralisation du groupe de l'allumeur de réverbères, fournit une réponse positive à la question posée. Il en découle l'existence d'un groupe hyperbolique de rang de Cantor-Bendixson infini. On présente également quelques résultats partiels sur la description exacte du noyau parfait de ce groupe. Cette étude constitue un travail en cours avec Damien Gaboriau et Joshua Frisch.

Table des matières

1 Introduction

Muni de la topologie de la convergence simple, l'espace des sous-groupes $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ d'un groupe dénombrable Γ s'identifie à un fermé de $\{0,1\}^\Gamma$. D'après le théorème de Cantor-Bendixson, il admet une unique décomposition $\mathrm{Sub}(\Gamma) = C \bigsqcup \mathcal{K}(\Gamma)$ en un ensemble dénombrable C et un fermé sans point isolé $\mathcal{K}(\Gamma)$. L'objet de ce rapport est de répondre à une question ouverte, posée par Damien Gaboriau : existe-t-il un groupe hyperbolique de rang de Cantor-Bendixson infini ? Nous savons que les groupes hyperboliques sont de présentation finie ; mieux, par la construction de Rips (*cf.* [Rip82]), tout groupe de présentation finie est quotient d'un groupe hyperbolique par un sous-groupe normal de type fini. Ainsi, le problème revient à chercher un groupe de présentation finie, mais de rang de Cantor-Bendixson infini.

Après avoir présenté le groupe de l'allumeur de réverbères, étudié dans [BGK12] par Bowen, Grigorschuk et Kravchenko, qui fournit un exemple de groupe de présentation infinie et de rang de Cantor-Bendixson ω, nous montrons dans la dernière section que le groupe de Baumslag $\mathcal{L}$ introduit dans [Bau72] fournit une réponse positive à la question posée. Ce dernier est défini par un produit semi direct $\mathcal{R} \rtimes \mathbb{Z}^2$ où $\mathcal{R}$ est un 2-groupe abélien libre de rang infini. Plus précisément on montre le

Théorème 1.1. *Le rang de Cantor-Bendixson du groupe de Baumslag est infini.*

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.2. *Il existe un groupe hyperbolique de rang de Cantor-Bendixson infini.*

Ce résultat fournit le premier exemple de groupe hyperbolique de rang de Cantor-Bendixson infini. Nous ne savons pas encore si le rang de Cantor-Bendixson du groupe de Baumslag est exactement ω.

La démonstration du théorème 1.1 repose sur le résultat suivant :

Considérons l'ensemble $\Omega_{2^n,r} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{R} \rtimes \mathbb{Z}^2)$ formé des sous-groupes Λ engendrés par $\Lambda_0 \leq \mathcal{R}$ et $2^n\mathbb{Z}^2$ tels que Λ_0 est stable par conjugaison par $2^n\mathbb{Z}^2$ mais pas par $2^m\mathbb{Z}^2$ pour $0 \leq m < n$ et tel que r est le rang normal de Λ_0 dans Λ (on rappelle que le rang normal d'un sous-groupe normal $H \triangleleft G$ est le nombre minimal d'éléments de H qui engendrent normalement H comme sous-groupe de G.). On démontrera :

1. $\Omega_{2^n,r} \neq \emptyset$ ssi $0 < r \leq 2^n$
2. Les éléments de $\Omega_{2^n,r}$ ne sont pas dans le noyau parfait
3. Tout élément de $\Omega_{2^n,r}$ est limite d'éléments de $\Omega_{2^n,r+1}$ si $0 \leq r < 2^n$.
4. $\Omega_{2^n,1} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{L})^{(2^n-1)}$

Nous présentons également nos progrès dans le calcul du noyau parfait du groupe de Baumslag. Plus précisément, on montre qu'un sous-groupe Λ de $\mathcal{L}$ est caractérisé par sa projection $\pi(\Lambda)$ sur $\mathbb{Z}^2$ et un sous-groupe additif $\Lambda_{\mathcal{R}} := \Lambda \cap \mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$. De plus, si $\pi(\Lambda) = (k,l)\mathbb{Z}$, ce sous-groupe additif est muni d'une structure supplémentaire de module (appelée (k,l)-*module*). Nos conclusions partielles sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 1.3. *Le noyau parfait $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ du groupe de Baumslag contient les sous-groupes Λ tels que :*

- $\pi(\Lambda) = 0$
- $\pi(\Lambda) = 2^n\varepsilon\mathbb{Z}$*, avec* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\varepsilon \in \{(1,0),(0,1),(1,-1)\}$ *tels que* $\Lambda_{\mathcal{R}}$ *est infiniment engendré en tant que* $2^n\varepsilon$*-module*

Il ne contient pas les sous-groupes Λ tels que :

- $\pi(\Lambda)$ *est de rang 2 en tant que* $\mathbb{Z}$*-module*
- $\pi(\Lambda) = k\varepsilon\mathbb{Z}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *impair et* $\varepsilon \in \{(1,0),(0,1),(1,-1)\}$
- $\pi(\Lambda) = (k,l)\mathbb{Z}$ *pour* $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ *et* $\Lambda_{\mathcal{R}}$ *est finiment engendré en tant que* (k,l)*-module.*

Nous ne savons pas encore si les sous-groupes Λ dont l'image $\pi(\Lambda)$ est de rang 1 engendrée par (k,l) exceptionnel avec k qui n'est ni impair ni une puissance de 2 sont dans le noyau parfait. Cette étude est en cours et constitue un travail en commun avec Damien Gaboriau et Joshua Frisch.

2 Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

2.1 Topologie sur l'espace des sous-groupes

Étant donné un groupe dénombrable Γ, on note $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ l'ensemble de ses sous-groupes. Via les fonctions indicatrices, cet ensemble s'injecte dans $\{0,1\}^\Gamma$. La proposition suivante montre que cette injection nous permet de définir une topologie sur l'espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable :

Proposition 2.1. *On munit $\{0,1\}^\Gamma$ de la topologie produit, qui en fait un espace polonais. Alors $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ est un fermé de $\{0,1\}^\Gamma$. De plus, une base de voisinages (ouverts-fermés) pour la topologie induite est :*

$$\mathcal{V}(O,I) = \{\Lambda \in \mathrm{Sub}(\Gamma) | O \cap \Lambda = \emptyset \text{ et } I \subseteq \Lambda\} \quad O, I \subseteq \Gamma \text{ des ensembles finis}$$

Démonstration.

$$\mathrm{Sub}(\Gamma) = \cap_{x,y\in\Gamma}\{\Lambda \in \{0,1\}^\Gamma, x \notin \Lambda\} \cup \{\Lambda \in \{0,1\}^\Gamma, y \notin \Lambda\} \cup \{\Lambda \in \{0,1\}^\Gamma xy^{-1} \in \Lambda\}$$

est fermé en tant qu'intersection de fermés. □

La topologie ainsi définie sur $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ est appelée topologie de Chabauty.

Exemple 2.2.
- *Si N est un sous-groupe de Λ, l'ensemble $\mathrm{Sub}_{N\leq}(\Gamma)$ des sous-groupes de Γ contenant N est un fermé.*
- *Si N est de plus finiment engendré, c'est aussi un ouvert.*

Remarque 2.3. *Une suite de sous-groupes Λ_n converge vers Λ ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \in \Lambda_n$ pour tout $n > n_0$.*
2. *Pour tout $\lambda \notin \Lambda$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \notin \Lambda_n$ pour tout $n > n_0$.*

Ainsi, la topologie de Chabauty est la restriction à l'ensemble des sous-groupes de la topologie de la convergence simple sur $\{0,1\}^\Gamma$.

Exemple 2.4. *Dans* $\mathrm{Sub}(\mathbb{Z})$*, la suite de sous-groupes définie par* $\Lambda_n = n\mathbb{Z}$ *converge vers* $\{0\}$.

Proposition 2.5. *Tout automorphisme du groupe* Γ *induit un homéomorphisme sur* $\mathrm{Sub}(\Gamma)$.

Proposition 2.6. *Pour tout sous-groupe* Λ_0 *de* Γ*,* $\begin{array}{cccc} f & : & \mathrm{Sub}(\Gamma) & \to & \mathrm{Sub}(\Lambda_0) \\ & & \Lambda & \mapsto & \Lambda \cap \Lambda_0 \end{array}$ *est continue.*

Proposition 2.7. *Soit* N *un sous-groupe normal finiment engendré de* Γ*. Alors la surjection canonique* $\pi : \Gamma \to \Gamma/N$ *induit un homéomorphisme* $\begin{array}{ccc} \tilde{\pi} : \mathrm{Sub}_{N\leq}(\Gamma) & \to & \mathrm{Sub}(\Gamma/N) \\ \Lambda & \mapsto & \Lambda/N \end{array}$

Exemple 2.8. *Dans* $\mathrm{Sub}(\mathbb{Z}^r)$*, une suite convergente de sous-groupes* Λ_n *de rang maximal* r *vers un sous-groupe* Λ *de rang* r *est stationnaire. En effet,* Λ *est finiment engendré donc* $\Lambda \subseteq \Lambda_n$ *à partir d'un certain rang. Les quotients* $\mathbb{Z}^r/\Lambda_n$ *sont inclus dans* $\mathbb{Z}^r/\Lambda$*, qui est fini car* Λ *est de rang* r *; il en résulte que* $\mathbb{Z}^r/\Lambda$ *a un nombre fini de sous-groupes. Mais* $\Lambda_n \to \Lambda$*, donc* $\mathbb{Z}^r/\Lambda_n$ *converge vers* $\mathbb{Z}^r/\Lambda$ *d'où* $\Lambda_n = \Lambda$.

Proposition 2.9. *Soit* X *un ensemble dénombrable. L'application*

$$\begin{array}{ccc} f : \{\textit{Classes d'isomorphismes de } \Gamma\textit{-actions transitives pointées sur } X\} & \to & \mathrm{Sub}(\Gamma) \\ (\alpha, v) & \mapsto & Stab_\alpha(v) \end{array}$$

est une bijection.
Cette bijection induit une topologie sur l'espace des classes d'isomorphismes de Γ*-actions transitives pointées sur* X *définit comme suit : soit* $\mathcal{G}_{(\alpha,v)}$ *le graphe de Schreier de* (α, v)*. Une base de voisinages de* α *est donnée par*

$$\mathcal{V}(\alpha, R) = \{\Gamma\textit{-actions pointées } (\beta, w) \textit{ telles que } B_{\mathcal{G}_{(\beta,w)}}(w, R) = B_{\mathcal{G}_{(\alpha,v)}}(v, R)\}$$

Remarque 2.10. $f(\alpha, \gamma \cdot_\alpha v) = \gamma f(\alpha, v)\gamma^{-1}$

2.2 Noyau parfait et rang de Cantor-Bendixson

2.2.1 Noyau parfait d'un espace polonais

Le théorème suivant est fondamental et est démontré dans [Kec95].

Théorème 2.11 (Cantor-Bendixson)**.** *Soit* X *un espace polonais. Il existe une unique décomposition*

$$X = \mathcal{K}(X) \bigsqcup C$$

avec C *dénombrable et* $\mathcal{K}(X)$ *fermé sans point isolé.*

En particulier, le noyau parfait de X est trivial ssi X est dénombrable. Remarquons que la décomposition donnée par le théorème de Cantor-Bendixson est invariante par tout homéomorphisme de X.

Définition 2.12. *$\mathcal{K}(X)$ est appelé noyau parfait de X.*

L'espace des sous-groupes étant polonais, l'application du théorème précédent à $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ fournit une unique décomposition en

— un ensemble dénombrable, qui ne nous intéressera pas.

— un ensemble de Cantor (noté $\mathcal{K}(\Gamma)$ par abus de notation), qui est l'objet de ce rapport, et qu'on appelle noyau parfait du groupe Γ par abus de langage.

Tout automorphisme de groupe de Γ induit un homéomorphisme sur $\mathrm{Sub}(\Gamma)$. Il en résulte que le noyau parfait est préservé par tout automorphisme de groupe.

La proposition suivante, également montrée dans [Kec95], fournit une caractérisation du noyau parfait qu'on sera amenés à utiliser dans certains calculs effectifs :

Proposition 2.13. *$\mathcal{K}(X) = \{x \in X | \text{tous les voisinages de } x \text{ sont indénombrables}\}$*

Exemple 2.14. — $\mathcal{K}(\mathrm{Sub}(\mathbb{Z}^d)) = \emptyset$

— $\mathcal{K}(BS(1,n)) = \emptyset$

On a également la construction explicite suivante :

Proposition 2.15. *Pour tout ordinal α, on pose :*

— *$X^{(\alpha)} = \{x \in X^{(\alpha-1)}$ non isolé dans $X^{(\alpha-1)}\}$ si α est un successeur.*

— *$X^{(\alpha)} = \cap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$ sinon*

Il existe un ordinal α tel que $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$. On a alors $\mathcal{K}(X) = X^{(\alpha)}$

Définition 2.16. *Le plus petit ordinal α vérifiant $X^{(\alpha)} = \mathcal{K}(X)$ est appelé rang de Cantor-Bendixson de X et est noté $\mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(X)$.*

Par exemple, si X est un espace polonais de rang de Cantor-Bendixson 1, son noyau parfait est exactement l'ensemble des points non isolés de X (et alors chaque point isolé est limite d'une suite de points non isolés), tandis que si le rang de Cantor-Bendixson est 2, c'est l'ensemble des points limites d'une suite de points non isolés dans X.

Exemple 2.17. *Soit Γ un groupe dénombrable et $\Lambda \subseteq \Gamma$ qui n'est pas finiment engendré. Alors $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\Gamma)^{(1)}$.*

Exemple 2.18. *Dans $X = \mathrm{Sub}(\mathbb{Z}^d)$, on a $X^{(r)} = \{\Lambda \in X, rg(\Lambda) \leq d-r\}$. En particulier, $\mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathrm{Sub}(\mathbb{Z}^d)) = d$.*

Le théorème suivant sera démontré dans la deuxième partie :

Théorème 2.19 (Bowen, Grigorschuk, Kravchenko)**.** *Soit $\mathcal{L} = \bigoplus_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \rtimes \mathbb{Z} := \mathcal{A}_{n,p} \rtimes \mathbb{Z}$ le groupe de l'allumeur de réverbères de paramètres (n,p). Alors*

— *$\mathcal{K}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L})) = \mathrm{Sub}(\mathcal{A}_{n,p})$*

— *$\mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L})) = \omega$*

2.2.2 Application à l'espace des sous-groupes

Proposition 2.20. *Soit Γ un groupe finiment engendré. Les sous-groupes d'indice fini de Γ sont isolés dans* $\mathrm{Sub}(\Gamma)$.

Démonstration. Soit Λ un sous-groupe d'indice fini de Γ. Montrons d'abord que Λ est finiment engendré. Soit $p : \mathbb{F}_n \to \Gamma$ une surjection du groupe libre à n générateurs dans Γ. Alors $p : p^{-1}(\Lambda) \to \Lambda$ est surjective. Par hypothèse, $p^{-1}(\Lambda)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathbb{F}_n$ (d'indice majoré par $[\Gamma : \Lambda]$). Donc d'après le théorème de Nielsen-Schreier, $p^{-1}(\Lambda)$ est un groupe libre rang fini.
Soit $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$ une famille génératrice de Λ. On note $\Gamma/\Lambda = \{\Lambda, \gamma_1 \mod \Lambda, ..., \gamma_r \mod \Lambda\}$.
Alors

$$\mathcal{V}(\{\gamma_i, i \in [\![1, r]\!]\}, \{\lambda_i, i \in [\![1, m]\!]\}) = \{\Lambda\}$$

Donc $\{\Lambda\}$ est ouvert, *i.e.* $\{\Lambda\}$ est isolé dans $\mathrm{Sub}(\Gamma)$. □

Corollaire 2.21. $\mathcal{K}(\mathrm{Sub}(\Gamma)) \subseteq \mathrm{Sub}_\infty(\Gamma)$

Une question naturelle est de déterminer des groupes pour lesquels l'inclusion précédente est une égalité.

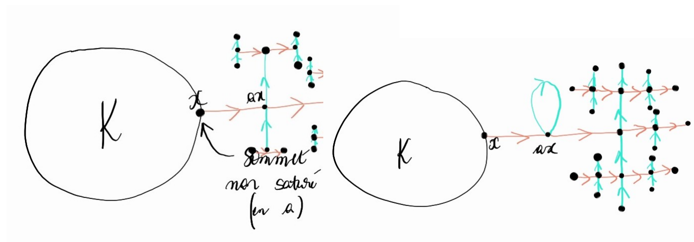
Théorème 2.22 (Carderi, Gaboriau, Le Maître)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathcal{K}(\mathrm{Sub}(\mathbb{F}_n)) = \mathrm{Sub}_\infty(\mathbb{F}_n)$*

Démonstration. Ce théorème est démontré dans [CGM21] On montre le résultat pour $\mathbb{F}_2$, le cas général étant analogue.
Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{F}_2 := \langle a, b\rangle$ d'indice infini et (α, v) la $\mathbb{F}_2$-action transitive pointée associée. Soit $\mathcal{G}$ son graphe de Schreier. On pose $K = B_{\mathcal{G}}(v, R)$ et on veut compléter K en deux graphes de Schreier non isomorphes.
$\Lambda \setminus \Gamma$ étant infini, il en est de même pour $\mathcal{G}$ donc il existe un sommet x de K sur lequel l'un des générateurs (ou son inverse) n'est pas défini, par exemple a. On sature x en a en le reliant à un nouveau sommet $a \cdot x \notin K$. Par récurrence sur la distance à v des sommets non saturés, on prolonge ainsi K en un graphe de Schreier $\mathcal{G}'$ vérifiant : $\mathcal{G}' \setminus K$ est un arbre.
On complète K en un second graphe non isomorphe comme suit : après avoir construit $a \cdot x$, on définit $b \cdot a \cdot x = a \cdot x$, puis on sature le graphe obtenu comme précédemment en un graphe de Schreier $\mathcal{G}''$. Par construction, $rg(\pi_1(\mathcal{G}'', v)) = rg(\pi_1(\mathcal{G}', v)) + 1$ donc $\mathcal{G}''$ et $\mathcal{G}'$ ne sont pas isomorphes. De plus, ces graphes sont infinis donc correspondent à des sous-groupes d'indice infini. □

La construction est résumée dans la figure suivante :
Le théorème suivant est montré dans [CGMS22] et s'appuie sur des techniques similaires (identification d'un sous-groupe avec une action transitive pointée).

Théorème 2.23 (Carderi, Gaboriau, Le Maître, Stalder)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ différents de* 1*. Alors :*

- *si* $|m| \neq |n|$, $\mathcal{K}(\mathrm{Sub}(BS(m, n)) = \mathrm{Sub}_\infty(BS(m, n))$
- *si* $|m| = |n|$, $\mathcal{K}(\mathrm{Sub}(BS(m, n))) = \pi^{-1}(\mathrm{Sub}_\infty(BS(m, n)/\langle b^n\rangle))$



(a) 1ère complétion de K (b) 2nde complétion de K

Dans la suite de ce rapport, on s'intéresse à des groupes dont le rang de Cantor-Bendixson est infini. La proposition 2.7 nous permet d'établir un lien entre le noyau parfait d'un groupe et celui d'un quotient de ce groupe, qui sera utilisé pour faire le lien entre groupe hyperbolique et groupe de présentation finie :

Proposition 2.24. *Soit Γ un groupe dénombrable et N un sous-groupe normal finiment engendré de Γ. Alors, $\mathrm{Sub}_{N\leq}(\Gamma)$ est un ouvert de $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ et pour tout ordinal α :*

$$(\mathrm{Sub}_{N\leq}(\Gamma)) \cap (\mathrm{Sub}(\Gamma))^{(\alpha)} = (\mathrm{Sub}(\Gamma/N))^{(\alpha)}$$

En particulier

$$\mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathrm{Sub}(\Gamma)) \geq \mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathrm{Sub}(\Gamma/N))$$

Démonstration. L'égalité $\mathrm{Sub}_{N\leq}(\Gamma)\cap(\mathrm{Sub}(\Gamma))^{(\alpha)} = (\mathrm{Sub}(\Gamma/N))^{(\alpha)}$ résulte de l'ouverture de $\mathrm{Sub}_{N\leq}(\Gamma)$ dans $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ (le sous-groupe N étant finiment engendré) et de la proposition 2.7. Il en résulte que

$$(\mathrm{Sub}(\Gamma))^{(\beta)}_{\beta\geq \mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathrm{Sub}(\Gamma))} \text{ constante} \quad \Longrightarrow \quad (\mathrm{Sub}(\Gamma/N))^{(\beta)}_{\beta\geq \mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathrm{Sub}(\Gamma))} \text{ constante}$$

On en déduit l'inégalité $\mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathrm{Sub}(\Gamma)) \geq \mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathrm{Sub}(\Gamma/N))$. □

3 Groupe de l'allumeur de réverbères

Dans [BGK12], les auteurs déterminent le noyau parfait du groupe de l'allumeur de réverbères et montrent que son rang de Cantor Bendixson vaut ω. Nous présentons ici leur calcul du noyau parfait, car les idées des preuves ont largement inspiré notre étude du groupe de Baumslag.

Pour comprendre la construction du groupe de l'allumeur de réverbères, on considère l'image suivante : étant donné un ensemble (fini) de lampes alignées sur une ligne, un allumeur de réverbères peut effectuer les trois actions suivantes :

— *via* a ($= a^{-1}$), changer l'état de la lampe en position 0 (*i.e.* l'allumer si elle est éteinte, et l'éteindre si elle est allumée)

— *via* t, décaler la configuration vers la droite (*i.e.* augmenter de 1 les indices des positions des lampes allumées)

— *via* t^{-1}, décaler la configuration vers la gauche (*i.e.* diminuer de 1 les indices des positions des lampes allumées)

Le groupe engendré par a et t agit alors librement sur l'espace des configurations et est appelé groupe de l'allumeur de réverbère de paramètre $(1, 2)$. Son action est décrite dans la figure suivante :

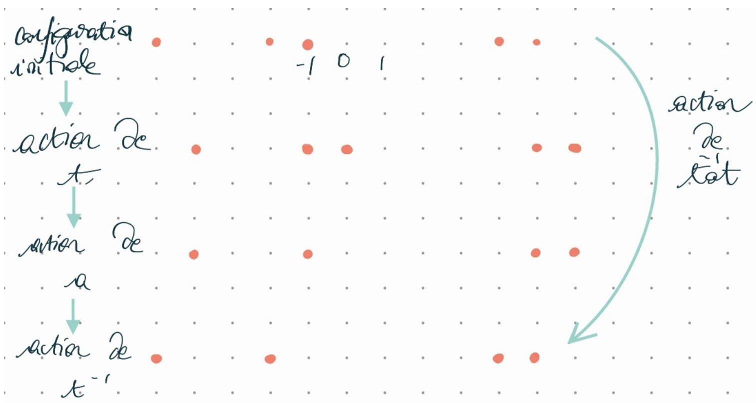


FIGURE 2 – Action du lamplighter

Définition 3.1. *Le groupe de l'allumeur de réverbères de paramètre (n, p) est défini par $\mathcal{L}_{n,p} = \bigoplus_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \rtimes \mathbb{Z}$, où l'action du produit semi-direct est définie par : $k \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (x_{n+k})_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Définition 3.2. *Le sous-groupe des lampes est $\mathcal{A}_{n,p} = \bigoplus_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.*

Remarque 3.3. *On peut identifier le sous-groupe des lampes à $\mathbb{F}_p[x, x^{-1}]^n$. L'action du produit semi-direct est alors défini par : pour $P = (P_1, ..., P_n) \in \mathbb{F}_p[x, x^{-1}]^n$, $k \cdot P = (x^k P_1, ..., x^k P_n)$. La loi de groupe est alors donnée par : $(P, s) \cdot (Q, t) = (P + x^s Q, s + t)$.*

Définition 3.4. *On note* $\begin{array}{cccc} \pi & : & \mathcal{L}_{n,p} & \to & \mathbb{Z} \\ & & (P, s) & \mapsto & s \end{array}$ *la projection.*

Proposition 3.5. *Un sous-groupe V de $\mathcal{L}_{n,p}$ est entièrement déterminé par un triplet (V_0, v, s) où $V_0 := V \cap \mathcal{A}_{n,p}$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}_{n,p}$ stable par multiplication par x^s et x^{-s}, s est un générateur de $\pi(V)$ et $(v, s) \in V$.*

Démonstration. Soit V un sous-groupe de $\mathcal{L}_{n,p}$ et s un générateur de $\pi(V)$. Il existe alors $v \in \mathcal{A}_{n,p}$ tel que $(v, s) \in V$. Pour tout $(w, 0) \in V$, on vérifie que $(v, s)(w, 0)(v, s)^{-1} = (x^s w, 0)$, ce qui implique : $x^s V_0 = V_0$. De plus, pour tout $(w, t) \in V$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $t = ks$, d'où : $(w, t)(v, s)^{-k} \in V_0$. Ainsi V est engendré par V_0 et $\langle (v, s) \rangle$.
Réciproquement, si V_0 est un sous-groupe additif de $\mathcal{A}_{n,p}$ vérifiant $x^s V_0 = V_0$, alors pour tout $v \in \mathbb{F}_p[x, x^{-1}]^n$, le groupe $V = \langle V_0, (v, s) \rangle$ vérifie $\pi(V) = s$, $(v, s) \in V$ et $V \cap \mathcal{A}_{n,p} = V_0$. En effet, comme $x^s V_0 = V_0$, le sous-groupe V_0 de V est distingué dans V donc tout élément (w, t) de V s'écrit $(w, t) = (w_0, 0) \cdot (v, s)^k$ avec $(w_0, 0) \in V_0$ et $k \in \mathbb{Z}$. Donc, si $(w, t) \in V \cap \mathcal{A}_{n,p}$: $k = 0$ d'où $(w, t) = (w_0, 0) \in V_0$. $\square$

Lemme 3.6. *L'ensemble des sous-groupes V de $\mathcal{L}_{n,p}$ vérifiant $\pi(V) \neq 0$ est dénombrable.*

Démonstration. Soit $V = \langle V_0, (v,s)\rangle$ un sous-groupe de $\mathcal{L}_{n,p}$ tel que $s > 0$. Muni de l'opération $x \cdot (P_1, ..., P_n) = (x^s P_1, ..., x^s P_n)$, $\mathbb{F}_p[x, x^{-1}]^n$ est alors un $\mathbb{F}_p[x, x^{-1}]$-module de rang ns et V_0 en est un sous-module. L'anneau $\mathbb{F}_p[x, x^{-1}]$ étant principal, tout sous-module est défini par une base finie (de cardinal $\leq ns$), donc l'ensemble des sous-groupes additifs V_0 de $\mathcal{A}_{n,p}$ qui sont invariants par x^s est dénombrable. Comme $\mathcal{A}_{n,p}$ est également dénombrable, il en résulte que

$$\{\langle V_0, (v,s)\rangle, x^s V_0 = V_0 \text{ et } v \in \mathcal{A}_{n,p}\} \text{ est dénombrable}$$

donc en faisant l'union sur $s \in \mathbb{N}^*$:

$$\{\langle V_0, (v,s)\rangle, s > 0, v \in \mathcal{A}_{n,p} \text{ et } x^s V_0 = V_0\} \text{ est dénombrable}$$

□

Corollaire 3.7. $\mathcal{K}(\mathcal{L}_{n,p}) = \mathrm{Sub}(\mathcal{A}_{n,p})$.

Démonstration. D'après le lemme 3.6

$$\{\langle V_0, (v,s)\rangle \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}_{n,p}), s > 0\}$$

est dénombrable. Cet ensemble s'écrit également comme

$$\cup_{(v,s)\in\mathcal{A}_{n,p}}\{V \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}_{n,p}), (v,s) \in V\}$$

donc est ouvert en tant qu'union de clopen. Ainsi, $\mathcal{K}(\mathcal{L}_{n,p}) \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{A}_{n,p})$.
Réciproquement, soit $V \in \mathrm{Sub}(\mathcal{A}_{n,p})$. On distingue deux cas :

— Si V est infini, on pose $V_N = V \cap \{P \in \mathbb{F}_p[x, x^{-1}], \deg_x(P) \leq N, \deg_{-x}(P) \leq N\}$. Le groupe additif V_N est alors fini pour tout N et on a

$$\cup_N V_N = V$$

donc la suite $(V_N)_N$ converge vers V dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_{n,p})$.
L'application $\begin{array}{cccc} f & : & \mathrm{Sub}(\mathcal{L}_{n,p}) & \to & \mathrm{Sub}(\mathcal{A}_{n,p}) \\ & & V & \mapsto & V \cap \mathcal{A}_{n,p} \end{array}$ étant continue, on en déduit que cette convergence a également lieu dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{L}_{n,p})$.

— Sinon, on il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $V \subseteq \{P \in \mathbb{F}_p[x, x^{-1}], \deg_x(P) \leq N_0, \deg_{-x}(P) \leq N_0\}$ et, pour $N \geq N_0$, on définit le groupe additif $V_N = V \bigoplus \mathbb{F}_p x^N$. On a alors $V_n \to V$ dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_{n,p})$ et par l'argument précédent, la convergence a aussi lieu dans $Sub(\mathcal{L}_{n,p})$.

Donc $\mathrm{Sub}(\mathcal{A}_{n,p}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{L}_{n,p})$ □

Théorème 3.8. *Le rang de Cantor-Bendixson de $\mathcal{A}_{n,p}$ est ω.*

4 Groupe de Baumslag

La partie qui suit est un travail en cours avec Damien Gaboriau et Joshua Frisch. Le but est de déterminer un groupe de présentation finie mais de rang de Cantor Bendixson infini. Pour cela, on utilise une généralisation du groupe de l'allumeur de réverbères, le groupe de Baumslag, introduit dans [Bau72]. Dans cet article, Baumslag démontre que ce groupe est de présentation finie (*cf.* proposition 4.10). Nous présentons ici une description alternative du groupe de Baumslag, mettant en avant le lien avec le groupe de l'allumeur de réverbères, puis montrons qu'il est isomorphe au groupe introduit dans l'article [Bau72] dans la proposition 4.10.

4.1 Généralités sur le groupe de Baumslag, sous-groupes

Le groupe de Baumslag est une généralisation du groupe de l'allumeur de réverbères. Pour le définir, on considère l'image suivante : étant donné un ensemble (fini) de lampes disposées sur un quadrillages (dont les positions sont repérées par des couples d'entiers relatifs), un allumeur de réverbères peut effectuer les actions suivantes :

— *via* $a = a^{-1}$, allumer la lampe en position $(0, 0)$

— *via* s (*resp.* s^{-1}), décaler toute la configuration vers la droite (*resp.* vers la gauche)

— *via* t (*resp.* t^{-1}), décaler toute la configuration vers le haut (*resp.* vers le bas)

De plus, l'allumeur peut changer simultanément les lampes disposées en triangle comme dans la figure suivante et obtenir une autre configuration qu'on définit équivalente à la configuration initiale.

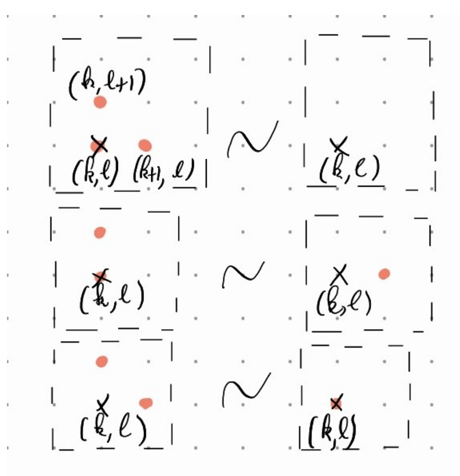


FIGURE 3 – Configurations en triangle équivalentes

Définition 4.1. *On pose*

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}/\sim \rtimes \mathbb{Z}^2$$

où la relation d'équivalence $\sim$ *est définie par :* $(u_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}} \sim (v^{(k,l)}_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$, *avec* $v^{(k,l)_{k,l}} = u_{k,l} + 1$, $v^{(k,l)}_{k-1,l} = u_{k-1,l} + 1$, $v^{(k,l)}_{k-1,l+1} = u_{k-1,l+1} + 1$ *et* $v^{(k,l)}_{n,m} = u_{n,m}$ *pour tous les autres indices* (n, m) *et l'action définissant le produit semi direct est définie par :* $(k, l) \cdot (u_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}} = (u_{n+k,m+l})_{n,m\in\mathbb{Z}}$.

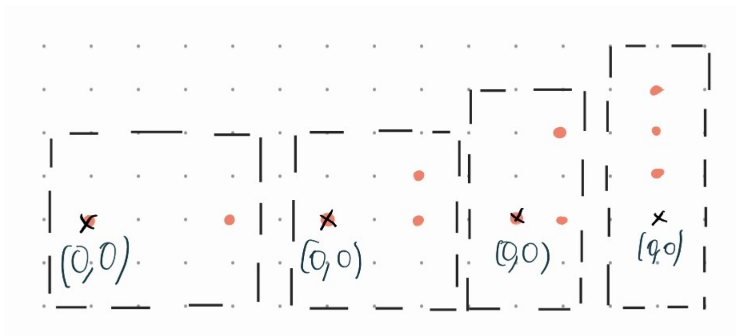


FIGURE 4 – Quatre configurations équivalentes

Proposition 4.2. *On a*

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathbb{F}_2[x, x^{-1}, y, y^{-1}]/(x^k y^l + x^{k-1} y^l + x^{k-1} y^{l+1})_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} \rtimes \mathbb{Z}^2 \\ &= \mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}] \rtimes \mathbb{Z}^2\end{aligned}$$

où l'action du produit semi-direct est définie par :

$$(k, l) \cdot P(x, x^{-1}, (1+x)^{-1}) = x^k (1+x)^l P(x, x^{-1}, (1+x)^{-1})$$

Démonstration. □

Il y a une subtilité ici : $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$ est considéré en tant que groupe additif, quotient du groupe $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ par le groupe formé des éléments multiples du polynôme $(1+x+y)$. C'est également un anneau, mais cette structure supplémentaire ne sera utilisée que dans la dernière partie.

Définition 4.3. *On pose* $\mathcal{R} = \mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$

Remarque 4.4. *La loi de groupe sur $\mathcal{L}$ est alors définie comme suit : pour tous $P, Q \in \mathcal{R}$, $(k, l), (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $(P, (k, l)) \cdot (Q, (m, n)) = (P + x^k (1+x)^l Q, (k+m, l+n))$.*

Définition 4.5. *On définit la projection* $\begin{array}{cccc}\pi & : & \mathcal{L} & \to & \mathbb{Z}^2 \\ & & (P, n) & \mapsto & n\end{array}$

Quelques outils arithmétiques

Lemme 4.6. *Pour tout $P \in \mathbb{F}_2[X]$, pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_2[x]$ vérifiant $\alpha(0) = 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $(q, r) \in \mathbb{F}_2[x]^2$ tel que :*

- $\deg(r) < \deg(\alpha)$
- $P = \alpha q + x^k r$

Démonstration. Par récurrence sur k.

<u>Initialisation</u> : Si $k = 0$, le résultat découle de la division euclidienne de P dans $\mathbb{F}_2[x]$.

Hérédité : Si $k > 0$, supposons l'existence de q_k, r_k tels que $\deg(r_k) < \deg(\alpha)$ et $P = \alpha q_k + x^k r_k$. Alors, par division euclidienne, comme $r_k(0) = (r_k(0)\alpha)(0)$, on a :

$$(r_k - r_k(0)\alpha)\frac{1}{x} = Q\alpha + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(\alpha)$$

Ainsi :

$$P = \alpha(q_k + r_k(0)x^k + Qx^{k+1}) + Rx^{k+1}$$

Donc l'hérédité est établie en posant $q_{k+1}, r_{k+1} = q_k + r_k(0)x^k + Qx^{k+1}, R$. □

Lemme 4.7. *Pour tout $P \in \mathbb{F}_2[x]$, pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_2[x]$ vérifiant $\alpha(0) = 1$ et $\alpha(-1) = 1$, pour tous $k, l \in \mathbb{N}$, il existe $(q, r) \in \mathbb{F}_2[x]^2$ tel que :*

— $\deg(r) < \deg(\alpha)$

— $P = \alpha q + x^k(1+x)^l r$

Démonstration. On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on raisonne par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$.

Initialisation Le cas $l = 0$ découle de la proposition précédente.

Hérédité : Supposons l'existence de $q_l, r_l \in \mathbb{F}_2[x]$ tels que $P = \alpha q_l + x^k(1+x)^l r_l$. Alors par division euclidienne, comme $r_l(-1) = (r_l(-1)\alpha)(-1)$:

$$(r_l - r_l(-1)\alpha)\frac{1}{1+x} = Q\alpha + R$$

donc

$$P = \alpha(q_l + r_l(-1)x^k(1+x)^l + Qx^k(1+x)^{l+1}) + Rx^k(1+x)^{l+1}$$

ce qui établit l'hérédité en posant $q_{l+1} = q_l + r_l(-1)x^k(1+x)^l + Qx^k(1+x)^{l+1}$ et $r_{l+1} = R$. □

Structures de $\mathcal{R}$, sous-groupes de $\mathcal{L}$

Proposition 4.8. *L'anneau $\mathcal{R}$ est principal et son groupe abélien sous-jacent est librement engendré par $x^k, (1+x)^{-l}$ $((k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$.*

Démonstration. — Soit I un idéal de $\mathcal{R}$ et $\alpha \in I$ un polynôme de degré minimal parmi tous les polynômes P de I. En particulier, $\alpha(0) = 1$ (sinon $x^{-1}\alpha$, de degré strictement inférieur, est un polynôme appartenant aussi à I) et $\alpha(1) = 1$ (pour une raison analogue avec $(1+x)^{-1}$).
Soit $Q \in I$. Soit $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $Qx^k(1+x)^l \in \mathbb{F}_2[x]$. On applique le lemme 4.7 qui fournit l'existence de polynômes q, r avec $\deg(r) < \deg\alpha$ et $Qx^k(1+x)^l = \alpha q + x^k(1+x)^l r$, d'où : $Q = \alpha\frac{1}{x^k(1+x)^l} + r$. I étant un idéal, il en résulte que $r \in I$ de degré strictement inférieur au degré de α. Donc $r = 0$ et $I = (\alpha)$. Donc $\mathcal{R}$ est un anneau principal.

— Soit $P \in \mathcal{R}$, *i.e.* $P = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} \varepsilon_{i,j}x^i(1+x)^{-j}$ (avec $(\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ presque nulle). Soit (i, j) tel que $\varepsilon_{i,j} \neq 0$:

— si $i \geq 0$, on effectue la division euclidienne de x^i par $(1+x)^l$, qui fournit l'existence de $q, r \in \mathbb{F}_2[x]$ avec $\deg(r) < j$ et :

$$\frac{x^i}{(1+x)^j} = q(x) + \frac{r(x)}{(1+x)^j}$$

La famille $1, (1+x), ..., (1+x)^{j-1}$ formant une $\mathbb{F}_2$-base de $\mathbb{F}_2[x]_{<j}$, il existe donc une décomposition $r(x) = \sum_{0 \leq l < j} \delta_l (1+x)^l$. Ainsi

$$\frac{x^i}{(1+x)^j} = q(x) + \sum_{0 \leq l < j} \frac{\delta_l}{(1+x)^l}$$

— si $i < 0$, on applique le lemme précédent à $P = 1$ et $k = i$ ce qui fournit : $1 = q(x)(1+x)^j + x^{-i} r$ avec $\deg(r) < j$. Ainsi

$$\frac{x^i}{(1+x)^j} = x^i q(x) + \frac{r(x)}{(1+x)^j}$$

et on conclut comme dans le point précédent en décomposant r dans la base $1, (1+x), ..., (1+x)^{j-1}$.

Montrons que l'écriture $P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon_k x^k + \sum_{i<0} \delta_i (1+x)^{-i}$ est unique. Par linéarité, supposons $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon_k x^k + \sum_{i<0} \delta_i (1+x)^{-i} = 0$. Soit $i_0 = \max\{i, \delta_i \neq 0\}$. Alors en multipliant l'égalité par $(1+x)^{i_0}$ et en évaluant en -1 on obtient $\delta_{i_0} = 0$, ce qui est absurde. Donc $\delta_i = 0$ pour tout i. De même, on montre que $\varepsilon_j = 0$ pour tout j. Ainsi, le groupe additif sous-jacent de $\mathcal{R}$ est abélien libre de rang infini.

□

Définition 4.9. *Pour tout $P \in \mathcal{R}$, l'unique écriture $P = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon_i x^i + \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \delta_j (1+x)^{-j}$ est appelée écriture canonique de P.*

Proposition 4.10. *Le groupe $\mathcal{L}$ admet la présentation suivante :*

$$\mathcal{L} \sim \langle a, s, t | a^2 = 1, [s,t] = 1, [a^t, a] = 1, [s,a] = a^t \rangle$$

En particulier, il est de présentation finie.

Démonstration. Soit Γ le groupe donné par la présentation $\langle a, s, t | a^2 = 1, [s,t] = 1, [a^t, a] = 1, [s,a] = a^t \rangle$ (*i.e.*, $\Gamma = \mathbb{L}_3 / \langle\langle a^2, [s,t], [a^t, a], [s,a](a^t)^{-1} \rangle\rangle$ où $\mathbb{L}_3$ est le groupe libre sur l'ensemble à trois éléments $\{a, s, t\}$). Définissons $\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi} : \mathbb{L}_3 & \to & \mathcal{L} \\ a & \mapsto & (1,(0,0)) \\ s & \mapsto & (0,(1,0)) \\ t & \mapsto & (0,(0,1)) \end{array}$

Montrons que $\tilde{\varphi}$ passe au quotient en un morphisme $\varphi : \Gamma \to \mathcal{L}$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(a)^2 &= (1,(0,0))^2 \\ &= (0,(0,0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(s)\tilde{\varphi}(t) &= (0,(1,1)) \\ &= \tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}(s) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(a)\tilde{\varphi}(a)^{\tilde{\varphi}(t)} &= (1,(0,0))(0,(0,1))(1,(0,0))((0,(0,1))^{-1} \\
&= (x,(0,0)) \\
&= \tilde{\varphi}(a)^{\tilde{\varphi}(t)}\tilde{\varphi}(a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(s)\tilde{\varphi}(a)\tilde{\varphi}(s)^{-1}\tilde{\varphi}(a)^{-1} &= (1,(0,0))(0,(1,0))(1,0,0))^{-1}(0,(1,0))^{-1} \\
&= (1+x,(0,0)) \\
&= (0,(0,1))(1,(0,0))((0,(0,1))^{-1} \\
&= \tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}(a)\tilde{\varphi}(t)^{-1}
\end{aligned}
$$

On en déduit l'existence du morphisme $\varphi : \Gamma \to \mathcal{L}$. Montrons que c'est un isomorphisme.

— On observe que la famille $\{a, s, t\}$ forme un système générateur de $\mathcal{L}$: notant $P = \sum \varepsilon_{k,l} x^k y^l$ on a :

$$(P,(i,j)) = (0,(i,j)) \cdot (x^{-i}y^{-j}P,(0,0)) = s^i t^j \prod \varepsilon_{k,l} s^k t^l a (s^k t^l)^{-1}$$

Donc φ est surjectif.

— Soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\varphi(\gamma) = (0,(0,0))$. Notons $\gamma = \alpha s^n t^m$ avec $(n,m) \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \langle\langle a \rangle\rangle$. Comme $\varphi(\alpha)$ est un conjugué de $(1,(0,0))$ dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{L})$, on a $\varphi(\alpha) = (P,(0,0))$ avec $P \in \mathcal{R}$. On en déduit

$$
\begin{aligned}
\varphi(\gamma) &= (P,(n,m)) \\
&= (0,(0,0)) \iff \gamma \in \langle\langle a \rangle\rangle \text{ et } \ \varphi(\gamma) = (0,(0,0))
\end{aligned}
$$

Or, d'après [Bau72], le groupe $\langle\langle a \rangle\rangle$ est librement engendré par $(a^t)^n, (a^s)^{-m}, (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On peut donc écrire

$$\gamma = \prod_i (a^t)^{n_i} (a^s)^{-m_i}$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
\varphi(\gamma) &= \left(\sum_i x^{n_i} + \sum_i (1+x)^{-m_i}, (0,0) \right) \\
&= (0,(0,0)) \iff n_i, m_i = 0, 0 \ \forall i
\end{aligned}
$$

on en déduit que φ est injectif.

Donc φ est un isomorphisme et $\mathcal{L}$ admet la présentation annoncée. □

Proposition 4.11. *Un sous-groupe Λ de $\mathcal{L}$ est uniquement déterminé par le sous-groupe $\pi(\Lambda)$ de $\mathbb{Z}^2$, le sous-groupe additif $\Lambda_{\mathcal{R}} := \Lambda \cap \mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$ et*

— *Si $\pi(\Lambda)$ est de rang 1, engendré par (k,l), un élément P de $\mathcal{R}$ tel que $(P,(k,l)) \in \Lambda$. On a alors $\Lambda = \langle \Lambda_{\mathcal{R}}, (P,(k,l)) \rangle$.*

— *Si $\pi(\Lambda)$ est de rang 2, engendré par $f_1 = (k,l)$ et $f_2 = (m,n)$, deux éléments P, Q de $\mathcal{R}$ tels que $(P, f_1) \in \Lambda$ et $(Q, f_2) \in \Lambda$. On a alors $\Lambda = \langle \Lambda_{\mathcal{R}}, (P,(k,l)), (Q,(m,n)) \rangle$.*

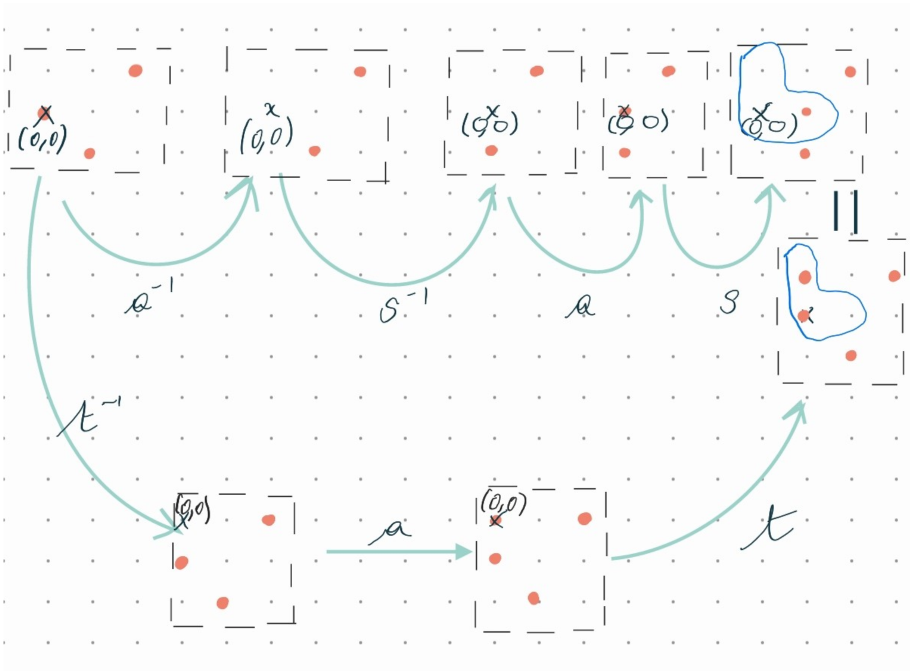


FIGURE 5 – Relation dans le groupe de Baumslag

— *Si* $\pi(\Lambda) = 0,\ \Lambda = \Lambda_{\mathcal{R}}$

vérifiant les conditions suivantes :

1. *(condition C_1) Pour tout* $f = (u, v) \in \pi(\Lambda),\ \ x^u(1+x)^v\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$.
2. *(condition C_2) Si* $\pi(\Lambda)$ *est de rang* 2 *(mettons engendré par* (k, l) *et* (m, n)*), pour tous entiers* r, s *on a*

$$(1+(x^m(1+x)^n)^s)\frac{(x^k(1+x)^l)^r+1}{x^k(1+x)^l+1}P+(1+(x^k(1+x)^l)^r)\frac{(x^m(1+x)^n)^s+1}{x^m(1+x)^n+1}Q \in \Lambda_{\mathcal{R}}$$

Réciproquement :

— *Si* f_1, f_2 *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants et* $\Lambda_{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R}, (P, f), (Q, g)$ *vérifient les conditions* C_1 *et* C_2*, alors* $\Lambda = \langle \Lambda_{\mathcal{R}}, (P, f_1), (Q, f_2)\rangle$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{L}$ *vérifiant* $\Lambda \cap \mathcal{R} = \Lambda_{\mathcal{R}}$ *et* $\pi(\Lambda) = \langle f_1, f_2\rangle$.

— *Si* $f \neq 0$ *et* $\Lambda_{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R},\ (P, f)$ *vérifient la condition* C_1*, alors* $\Lambda = \langle \Lambda_{\mathcal{R}}, (P, f)\rangle$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{L}$ *vérifiant* $\Lambda \cap \mathcal{R} = \Lambda_{\mathcal{R}}$ *et* $\pi(\Lambda) = (k, l)\mathbb{Z}$.

Remarque 4.12. *La condition* C_1 *peut être testée sur une* $\mathbb{Z}$*-base de* $\pi(\Lambda)$ *(vu comme sous-module de* $\mathbb{Z}^2$*).*

Démonstration. On s'intéresse au rang 2, le rang 1 résultant d'un raisonnement très similaire à celui effectué sur le groupe de l'allumeur de réverbères classique.

Soit Λ un sous-groupe de $\mathcal{L}$ avec $\pi(\Lambda)$ de rang 2, engendré par f_1 et f_2. Pour tout $(R,(u,v)) \in \Lambda$, il existe $r,s \in \mathbb{Z}$ tels que $(u,v) = rf_1 + sf_2$ donc

$$(R,(u,v))(P,f_1)^{-r}(Q,f_2)^{-s} \in \Lambda_{\mathcal{R}}$$

Ainsi, $\Lambda = \langle \Lambda_{\mathcal{R}}, (P,f_1), (Q,f_2) \rangle$.
De plus, pour tout $(R,0) \in \Lambda_{\mathcal{R}}$:

$$(P,f_1)(R,0)(P,f_1)^{-1} = (x^k(1+x)^l R, 0) \in \Lambda_{\mathcal{R}}$$

Donc $\Lambda_{\mathcal{R}}$ est stable par $x^k(1+x)^l$, donc par $x^m(1+x)^n$ de façon analogue (en utilisant (Q,f_2)). On en déduit C_1
Pour tous $r,s \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(P,f_1)^r(Q,f_2)^s(P,f_1)^{-r}(Q,f_2)^{-s} = \Bigg(1 + (x^m(1+x)^n)^s)\frac{(x^k(1+x)^l)^r+1}{x^k(1+x)^l+1}P \\ + (1+(x^k(1+x)^l)^r)\frac{(x^m(1+x)^n)^s+1}{x^m(1+x)^n+1}Q, (0,0)\Bigg)$$

Donc $\Lambda_{\mathcal{R}}$ vérifie C_2.

Réciproquement, supposons que $\Lambda_{\mathcal{R}}, (P,f_1), (Q,f_2)$ vérifient C_1 et C_2 et que $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}^2$ forment une famille libre sur $\mathbb{Q}$. On pose $\Lambda = \langle \Lambda_{\mathcal{R}}, (P,f_1), (Q,f_2) \rangle$ et on veut montrer que $\Lambda \cap \mathcal{R} = \Lambda_{\mathcal{R}}$.
Soit $\lambda \in \Lambda \cap \mathcal{R}$. On remarque d'abord que $\Lambda_{\mathcal{R}} \triangleleft \Lambda$: en effet, on a, pour tout $\lambda_0 \in \Lambda_{\mathcal{R}}$:

$$(P,(k,l))(\lambda_0,(0,0))(P,(k,l))^{-1} = (x^k(1+x)^l\lambda_0,(0,0)) \in \Lambda_{\mathcal{R}} \text{ par la condition } C_1$$

et de même

$$(Q,(m,n))(\lambda_0,(0,0))(Q,(m,n))^{-1} \in \Lambda_{\mathcal{R}}$$

Ainsi on peut écrire

$$\lambda = \lambda_0(P,f_1)^{n_1}(Q,f_2)^{m_1}...(P,f_1)^{n_k}(Q,f_2)^{m_k} \in \Lambda_{\mathcal{R}} \text{ avec } \lambda_0 \in \Lambda_{\mathcal{R}} \textit{ i.e.} \sum n_i = \sum m_i = 0$$

Ainsi

$$\lambda = \lambda_0 \prod_i [(P,f_1)^{\sum_{j\le i} n_j}, (Q,f_2)^{\sum_{j \le i} m_j}][(Q,f_2)^{\sum_{j\le i} m_j}, (P,f_1)^{\sum_{j\le i+1} n_j}]$$

Comme $\Lambda_{\mathcal{R}}$, $(P,f_1),(Q,f_2)$ vérifient C_2, chaque commutateur de ce produit est dans $\Lambda_{\mathcal{R}}$. Il en résulte que $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{R}}$. Donc $\Lambda \cap \mathcal{R} = \Lambda_{\mathcal{R}}$. □

Corollaire 4.13. *Soit $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-groupes additifs de $\mathcal{R}$, $(P,f),(Q,g) \in \mathcal{L}$ tels que Λ_n, (P,f_1), (Q,f_2) vérifient C_1 et C_2 pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\Lambda_n \to \Lambda$ dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{R})$. Alors $\langle \Lambda_n, (P,f),(Q,g)\rangle \to \langle \Lambda, (P,f),(Q,g)\rangle$ dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{L})$.*

Démonstration. □

Remarque 4.14. *En particulier, si $P = Q = 0$, la condition C_2 est clairement vérifiée.*

4.2 Calcul du noyau parfait (travail en cours)

Dans cette partie, on présente nos premiers calculs sur le noyau parfait en distingant trois cas, suivant le rang de l'image par π d'un sous-groupe en tant que sous-module de $\mathbb{Z}^2$. Le cas où le rang vaut 1 est à ce jour inachevé.

4.2.1 Rang 0

De même que pour le groupe de l'allumeur de réverbères classiques, tous les groupes de lampes (*i.e.* les groupes dont l'image par π est triviale) sont dans le noyau parfait :

Lemme 4.15. $\{\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}), \pi(\Lambda) = 0\} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{L})$.

Démonstration. Posons $K = \{\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}), \pi(\Lambda) = 0\} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{L})$ et montrons que K est un fermé sans point isolé.

Montrons la fermeture : on écrit

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{L}) \setminus K = \cup_{f \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \cup_{P \in \mathcal{R}} \{\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}), (P, f) \in \Lambda\}$$

de sorte que $\mathrm{Sub}(\mathcal{L}) \setminus K$ est ouvert en tant qu'union de clopen. Donc K est fermé.

Montrons que tous les points de K sont d'accumulation dans K. Soit $\Lambda \in K$. On distingue deux cas :

— soit Λ est infini, auquel cas on pose

$$G_n = \Lambda \cap \left\{P \in \mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}], \max(\deg_x^+(P), \deg_x^-(P)) \leq N\right\}$$

Alors G_n est un sous-groupe additif fini de $\mathcal{R}$ convergeant dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{R})$ vers Λ donc, l'application $\Lambda \mapsto \Lambda \cap \mathcal{R}$ étant continue, Λ n'est pas isolé dans K.

— soit Λ est fini, auquel cas on pose $G_n = \Lambda \bigoplus x^n$ et on conclut de même que Λ n'est pas isolé dans K.

$\square$

4.2.2 Rang 2

Dans le cas du rang 2, la situation est là encore similaire à celle qu'on avait pour le groupe de l'allumeur de réverbères : un sous-groupe dont la projection par π est de rang maximal (ici 2) n'appartient pas au noyau parfait.

Proposition 4.16. *Soit $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}$ tel que $\pi(\Lambda)$ est de rang 2 en tant que $\mathbb{Z}$-module. Alors*

— $x^{\det(\pi(\Lambda))\Lambda_{\mathcal{R}}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$
— $(1+x)^{\det(\pi(\Lambda))\Lambda_{\mathcal{R}}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$

Démonstration. Soit (f, g) une $\mathbb{Z}$-base de $\pi(\Lambda)$ (vu comme sous-module de $\mathbb{Z}^2$). Notant $f = (k, l)$ et $g = (m, n)$, on a alors :

$$x^k(1+x)^l\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}} \text{ et } x^m(1+x)^n\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$$

Par itération des formules, on en déduit

$$(x^m(1+x)^n)^{-l}(x^k(1+x)^l)^n\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$$

soit

$$x^{\det(\pi(\Lambda))}\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$$

De même,

$$(1+x)^{\det(\pi(\Lambda))}\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$$

□

Lemme 4.17. $\mathcal{K}(\mathcal{L}) \subseteq \{\Lambda \subseteq \mathcal{L} | rg(\pi(\Lambda)) < 2\}$

Démonstration. Soit Λ tel que $rg(\pi(\Lambda)) = 2$. Soient (k_1, l_1) et (k_2, l_2) des générateurs de $\pi(\Lambda)$ (en tant que $\mathbb{Z}$-module) et $N = |k_1 l_2 - k_2 l_1|$ le déterminant du réseau défini par $\pi(\Lambda)$. Alors par le lemme 4.16 on a :

1. $x^N\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$
2. $(1+x)^N\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$

Soit $U = \Lambda_{\mathcal{R}} \cap \mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$. L'égalité (1) implique que la loi $x \cdot P = x^N P$ munit $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$ d'une structure de $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$-module de rang N et que U en est un sous-module (donc libre de rang $\leq N$ car $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$ est principal). Notons $P_1, ..., P_r$ une base de U.
Pour tout $Q \in \Lambda_{\mathcal{R}}$, on peut donc écrire (pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, moyennant l'égalité (2)) $Q(1+x)^{kN} = \sum_i R_i(x, x^{-1}) \cdot P_i$. Ainsi $Q = \sum \frac{R_i(x^N, x^{-N})}{(1+x)^{kN}} P_i$.
On en déduit que l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \{(P_1, ..., P_r) \in \mathcal{R}^r, 0 \leq r \leq N\} & \to & \left\{\Lambda_{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R}, x^N\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}, (1+x)^N\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}\right\} \\ & & (P_1, ..., P_r) & \mapsto & \left\{\sum R_i(x^N, x^{-N}, (1+x)^{-N})P_i\right\} \end{array}$$

est surjective et l'ensemble de gauche est dénombrable. Il en résulte que l'ensemble de droite est dénombrable, puis que $V = \{\Lambda \subseteq \mathcal{L}, rg(\pi(\Lambda)) = 2\}$ est dénombrable (par dénombrabilité des fibres de l'application $\Lambda \mapsto \Lambda \cap \mathcal{R}$).
Enfin, $V = \cup_{(f_1,f_2) \in M_2(\mathbb{Z}) \cap GL_2(\mathbb{Q})} \cup_{P_1, P_2 \in \mathcal{R}} \{\Lambda | (P_1, f_1) \in \Lambda, (P_2, f_2) \in \Lambda\}$ est un ouvert en tant qu'union d'ouverts. Comme il est de plus dénombrable, il est inclus dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{K}(\mathcal{L})$ d'après la proposition 2.13.

□

4.2.3 Rang 1

Dans le cas des groupes dont l'image par π est de rang 1, la situation est plus délicate. Il n'y a désormais plus qu'une direction invariante pour $\Lambda_{\mathcal{R}}$ (donnée par un générateur (k, l) de $\pi(\Lambda)$). Cette direction définit une structure de $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$-module sur $\mathcal{R}$ (que nous définissons ci-dessous), mais les situations peuvent être très différentes suivant le paramètre (k, l). Ainsi, l'une des principales difficultés est la suivante (*cf.* 4.23) :

- Si $k = 0$ ou $l = 0$ ou $k = -l$ (le paramètre (k, l) est alors dit "exceptionnel", *cf.* 4.22), $\mathcal{R}$ est infiniment engendré
- Sinon, $\mathcal{R}$ est finiment engendré

Notons que les directions exceptionnelles correspondent exactement aux axes de la relation d'équivalence définissant le groupe de Baumslag !

(k,l)**-modules**

Définition 4.18. *Soit $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$. On définit une loi de $\mathbb{F}_2[x,x^{-1}]$-module sur $\mathbb{F}_2[x,x^{-1},(1+x)^{-1}]$ en posant : $x \cdot_{k,l} P(x,x^{-1},(1+x)^{-1}) = x^k(1+x)^l P(x,x^{-1},(1+x)^{-1})$. On note $\mathbb{F}_2[x,x^{-1},(1+x)^{-1}]^{(k,l)}$ le module défini par les éléments de $\mathbb{F}_2[x,x^{-1},(1+x)^{-1}]$ et la loi $\cdot_{k,l}$.*

Définition 4.19. *Un (k,l)-module est un sous-module de $\mathbb{F}_2[x,x^{-1},(1+x)^{-1}]^{(k,l)}$.*

Proposition 4.20. *Soit $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L})$ tel que $(k,l) \in \pi(\Lambda)$. Alors $\Lambda_{\mathcal{R}}$ est un (k,l)-module.*

Définition 4.21. *Soient $P_1,...,P_r \in \mathbb{F}_2[x,x^{-1},(1+x)^{-1}]$. Le module (k,l)-engendré par $P_1,...,P_r$ est noté $\langle P_1,...,P_r\rangle_{(k,l)}$.*

Définition 4.22. *Un couple $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ est dit exceptionnel si $(k,l) \in \{1,0\}\mathbb{Z} \cup \{0,1\}\mathbb{Z} \cup (1,-1)\mathbb{Z}$.*

Lemme 4.23. *Soit $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$.*

- *Si (k,l) n'est pas exceptionnel, $\mathbb{F}_2[x,x^{-1},(1+x)^{-1}]^{(k,l)}$ est (k,l)-finiment engendré.*
- *Sinon, il est de rang infini.*

Pour montrer ce lemme, on commence par montrer les résultats suivants :

Lemme 4.24. *Soit $(k,l) \in \mathbb{N}^{*2}$ et M un (k,l)-module contenant $x^i(1+x)^jP$ pour un certain $P \in \mathcal{R}$ et pour tout $(i,j) \in \{(0,0),(1,0),...,(k,0),(k,1),...,(k,l-1)\}$. Alors M contient $x^i(1+x)^jP$ pour tout (i,j) dans $\{(0,1),(1,1),...,(k,1),(k,2),...,(k,l)\} \cup \{(0,-1),(1,-1),...,(k,-1),(k,0),...,(k,l-2)\}$*

Démonstration. — Pour tout $n < k$, $x^nP + x^{n+1}P = x^n(x+1)P$ donc $x^n(x+1)P \in M$.

- Pour $n = k$, $x^k(x+1)P \in M$ par définition.
- Pour tout $n < l$, $(1+x)x^k(1+x)^l = x^k(1+x)^lP \in M$ par définition.
- Pour $n = l$, $(1+x)x^k(1+x)^{l-1}P = x \cdot P \in M$.

Donc $P(1+x), x(1+x)P, ..., x^k(1+x)P, x^k(1+x)^2P, ..., x^k(1+x)^lP \in M$.

- $x^{-1} \cdot x^k(1+x)^{l-1}P = (1+x)^{-1}P \in M$.
- En notant que $1+\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, on en déduit que $\frac{x}{1+x}P \in M$ et par récurrence immédiate (en utilisant le fait que $x^n + \frac{x^n}{1+x} = \frac{x^{n+1}}{1+x}$), on en déduit que $\frac{x^n}{1+x}P \in M$ pour tout $n \leq k+1$.
  $(1+x)^{-1}x^k(1+x)^n \in M$ pour tout $n \in [\![1, l-1]\!]$ par définition.

Donc $(1+x)^{-1}P, x(1+x)^{-1}P, ..., (1+x)^{-1}x^kP, x^kP, ..., x^k(1+x)^{l-2}P \in M$. $\square$

Corollaire 4.25. $\mathbb{F}_2[x,x^{-1},(1+x)^{-1}]$ *est (k,l)-engendré par* $1, x, ..., x^k, x^k(1+x), ..., x^k(1+x)^{l-1}$.

Démonstration. Soit M le (k,l)-module engendré par $1, x, ..., x^k, x^k(1+x), ..., x^k(1+x)^{l-1}$. Par récurrence immédiate moyennant le lemme précédent, M contient $(1+x)^n, x(1+x)^n, ..., x^k(1+x)^n, x^k(1+x)^{n+1}, ..., x^k(1+x)^{n+l}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. On effectue la division euclidienne de n par k : $n = qk-r$ avec $0 \leq r < k$, de sorte que :

$$x^n(1+x)^m = x^q \cdot x^r(1+x)^{m-ql}$$

Or par la remarque précédente, $x^k(1+x)^{m-ql} \in M$ et M étant un (k,l)-module il en résulte : $x^n(1+x)^m \in M$.
On en déduit que $M = \mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$. $\square$

La preuve précédente se résume ainsi en image :

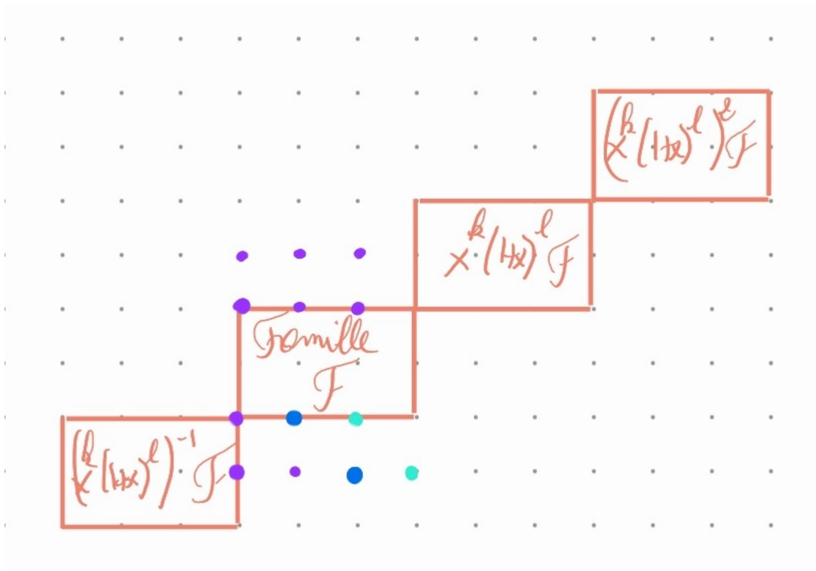


FIGURE 6 – Paramètre (k,l) avec $k, l > 0$

Lemme 4.26. *Soit $(k,l) \in \mathbb{N}^{*2}$ et M un $(k,-l)$-module contenant $x^i(1+x)^k P$ pour un certain $P \in \mathcal{R}$ et tout $(i,j) \in \{(0,0),(1,0),...,(k,0),(k,-1),...,(k,-(l-1))\}$. Alors M contient $x^i(1+x)^j$ pour tout $(i,j) \in \{(0,-1),(1,-1),...,(k,-1),(k,-2),...,(k,-l)\} \cup \{(0,1),(1,1),...,(k,1),(k,0),...,(k,-(l-2))\}$.*

Démonstration. Le fait que $(1+x)^{-1}P, x(1+x)^{-1}P, ..., (1+x)^{-1}x^kP, x^k(1+x)^{-2}P, ..., x^k(1+x)^{-l}P \in M$ résulte des mêmes calculs que dans le lemme 4.24.
On a aussi $(1+x)x^nP \in M$ pour tout $n < k$ et $x^k\frac{1}{(1+x)^n} \in M$ pour tout $n \in [\![0, l-2]\!]$ par définition.
Il reste à montrer que $x^k(1+x)P \in M$.
Supposons d'abord $k > l$. Pour tout $n \leq k-1$, on a

$$(x \cdot x^n + x \cdot x^{n+1})P = (1+x)(x \cdot x^n)P \in M$$

Ainsi, pour tout $n \leq k-2$,

$$((1+x)x \cdot x^n + (1+x)x \cdot x^{n+1})P = ((1+x)^2 x \cdot x^n)P \in M$$

et par récurrence immédiate on en déduit que

$$((1+x)^l x \cdot x^n)P \in M \quad \text{pour tout } 0 \leq n \leq k-l$$

donc pour $n = 1$ (licite car $k < l$), on trouve : $x^{k+1}P \in M$. Il en résulte que $x^k(1+x)P = (x^k + x^{k+1})P \in M$.
Supposons maintenant $k < l$. On remarque d'abord que $(1+x)^n P \in M$ pour tout $0 \leq n < l$ (en effet, $x^{-1} \cdot \frac{x^k}{(1+x)^n} = (1+x)^n$ pour tout $0 \leq n < l$). Pour tout $n < l$ on a donc

$$x^{-1} \cdot (1+x)^n + x^{-1} \cdot (1+x)^{n+1} = (1+x)x^{-1} \cdot x^n \in M$$

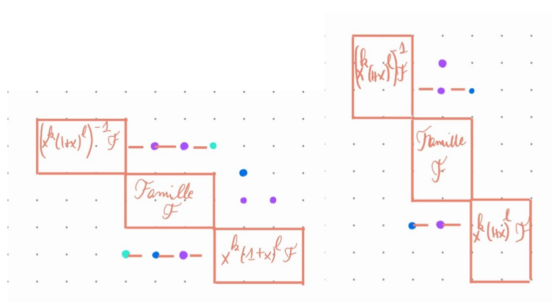
et par récurrence immédiate (de même que précédemment) on trouve :

$$(1+x)^k x^{-1} \cdot x^n \in M \text{pour tout } 0 \leq n \leq l-k$$

En particulier pour $n = 1$: $(1+x)^{l+1} \in M$ donc $x^{k+1} = x \cdot (1+x)^{l+1} \in M$. □

Corollaire 4.27. $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$ *est* $(k, -l)$*-engendré par* $1, ..., x^k, \frac{x^k}{1+x}, ..., \frac{x^k}{(1+x)^{l-1}}$.

Démonstration. On raisonne comme pour le corollaire 4.25 par récurrence moyennant le lemme 4.26. □



(a) Paramètre $(k, -l)$
$(k > l)$

(b) Paramètre $(k, -l)$
$(k < l)$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le lemme 4.23 :

Démonstration du lemme 4.23. — Supposons (k, l) non exceptionnel. On remarque d'abord que pour tout $e \in \mathbb{Z}^*$, pour tout $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ et tout (k, l)-module M, le module M est également un (ek, el)-module et il est finiment engendré en tant que (k, l) module ssi il l'est en tant que (ek, el)-module. Quitte à multiplier (k, l) par -1, on peut donc supposer $k > 0$. Le résultat suit alors des corollaires 4.25 et 4.27 ci-dessous.

— Supposons (k, l) exceptionnel. Quitte à multiplier par un élément de $\mathbb{Z}$ pour obtenir le cas général comme précédemment, on peut supposer $(k, l) \in \{(1, 0), (0, 1), (1, -1)\}$.
  — Supposons $(k, l) = (1, 0)$ (le cas $(0, 1)$ étant symétrique).
  Soient $P_1, ..., P_r \in \mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$. On écrit $P_i = \frac{Q_i(x, x^{-1})}{(1+x)^{n_i}}$ (avec $Q_i \in \mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$) de sorte que, notant $N = \max\{n_i, 1 \leq i \leq r\}$: $P_i \in \frac{\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]}{(1+x)^N}$. On a alors

$$\langle P_1, ... P_r \rangle_{(k,l)} \in \frac{\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]}{(1+x)^N}$$

donc en particulier

$$\frac{1}{(1+x)^{N+1}} \notin \langle P_1, ..., P_r \rangle_{(k,l)}$$

(par unicité de l'écriture canonique.) Ainsi $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$ n'est pas finiment engendré.

— Supposons $(k,l) = (1,-1)$. Soient $P_1, ..., P_r \in \mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$. Un élément P du module $(1,-1)$-engendré par les P_i s'écrit alors

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{r} Q_i \cdot_{(1,-1)} P_i \quad \text{avec } Q_i \in \mathbb{F}_2[x, x^{-1}] \\ &= \sum_{i=1}^{r} Q_i \left(\frac{x}{1+x}, \frac{1+x}{x} \right) P_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} Q_i \left(1 - \frac{1}{1+x}, 1 + \frac{1}{x} \right) P_i \end{aligned}$$

dont l'écriture canonique a des puissances positives de x bornées par les puissances positives des P_i, en nombre fini. Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand,

$$x^N \notin \langle P_1, ..., P_r \rangle_{(1,-1)}$$

Donc $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]^{(1,-1)}$ n'est pas finiment engendré.

□

Rang 1 de paramètre (k,l) non exceptionnel

Corollaire 4.28. *Soit $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L})$ tel que $\pi(\Lambda) = (k,l)\mathbb{Z}$ avec (k,l) non exceptionnel. Alors $\Lambda \notin \mathcal{K}(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} V &= \{\Lambda' \subseteq \mathcal{L} | (k,l) \in \pi(\Lambda')\} \\ &= \cup_{P \in \mathbb{F}_2[x,x^{-1},(1+x)^{-1}]} \{\Lambda' \subseteq \mathcal{L} | (P,(k,l)) \in \Lambda'\} \end{aligned}$$

V est alors un voisinage de Λ.

Notons $\begin{array}{cccc} f & : & \mathrm{Sub}(\mathcal{L}) & \to & \mathrm{Sub}(\mathcal{R}) \\ & & \Lambda & \mapsto & \Lambda \cap \mathcal{R} \end{array}$. Alors f est continue et à fibres dénombrables.

De plus, $f(V) \subseteq \{(k,l)\text{-modules}\}$. $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]^{(k,l)}$ étant finiment engendré sur un anneau principal par admissibilité de (k,l) et par le lemme 4.23, il possède un ensemble dénombrable de sous-modules. Ainsi, $f(V)$ est dénombrable. Comme f est à fibres dénombrables, il en résulte que V est dénombrable.

Donc $\Lambda \notin \mathcal{K}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L}))$. □

Rang 1 de paramètre (k,l) exceptionnel

Lemme 4.29. *Les $(k,0)$-modules (resp. $(k,-k),(0,k)$) finiment engendrés sont libres de rang inférieur à k.*

Démonstration. $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$ est le module $(k, 0)$-engendré par $1, x, ..., x^{k-1}$. Il est libre de rang k. Si $r > k$, soit par l'absurde une famille libre $P_1, ..., P_r \in \mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$. Alors il existe N_0 tel que $P_i(1+x)^{N_0} \in \mathbb{F}_2[x, x^{-1}] = \langle 1, ..., x^{k-1} \rangle$, donc par principalité le module $(k, 0)$-engendré par $P_1(1+x)^{N_0}, ..., P_r(1+x)^{N_0}$ est de rang inférieur à k. Donc la famille $P_1, ...P_r$ n'est pas libre, contradiction.
En remplaçant x par $(1+x)$ et en remarquant que $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}] = \mathbb{F}_2[(1+x), (1+x)^{-1}, x^{-1}]$, on montre de même que tout module finiment $(0, k)$-engendré est de rang inférieur à k (et que $\mathbb{F}_2[(1+x), (1+x)^{-1}]$ est $(0, k)$-engendré par $1, (1+x), ..., (1+x^{k-1})$. Le dernier cas se traite de façon analogue en remplaçant x par $\frac{x}{1+x}$ et en notant que $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}] = \mathbb{F}_2[\frac{x}{1+x}, \frac{1+x}{x}, x]$. Le sous module $\mathbb{F}_2[\frac{1+x}{x}, \frac{x}{1+x}]$ est alors de rang k, et k est le rang maximal d'un sous-module finiment engendré. □

Notre objectif est d'étudier l'appartenance ou non au noyau parfait des sous-groupes dont l'image par π est engendrée par un vecteur exceptionnel. Tout d'abord, on utilise la présentation $\mathcal{L} \sim \langle a, s, t | a^2 = 1, [s, t] = 1, [a^t, a] = 1, [s, a] = a^t \rangle$ fournie par le lemme 4.10 et on remarque qu'on peut se restreindre à des paramètres de la forme $(k, 0)$ grâce à la proposition suivante :

Proposition 4.30. *On a*

1. *L'application* $\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ & & a & \mapsto & a \\ & & s & \mapsto & t \\ & & t & \mapsto & s \end{array}$ *définit un isomorphisme qui envoie un sous-groupe* $\Lambda \subseteq \mathcal{L}$ *vérifiant* $\pi(\Lambda) = (k, 0)\mathbb{Z}$ *sur un sous-groupe* $f(\Lambda)$ *vérifiant* $\pi(f(\Lambda)) = (0, k)\mathbb{Z}$.
2. *L'application* $\begin{array}{cccc} g & : & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ & & a & \mapsto & a \\ & & s & \mapsto & st^{-1} \\ & & t & \mapsto & t^{-1} \end{array}$ *définit un isomorphisme qui envoie un sous-groupe* $\Lambda \subseteq \mathcal{L}$ *vérifiant* $\pi(\Lambda) = (k, 0)\mathbb{Z}$ *sur un sous-groupe* $f(\Lambda)$ *vérifiant* $\pi(f(\Lambda)) = (k, -k)\mathbb{Z}$.

Démonstration. 1. On a

$$\begin{aligned} [f(a)^{f(t)}, f(a)] &= [a^s, a] \\ &= [a^t a, a] \\ &= 1 \text{ car } [a^t, a] = 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(a)^{f(t)} &= a^s \\ &= [s, a]a \\ &= a^t a \\ &= [t, a] \\ &= [f(s), f(a)] \end{aligned}$$

Enfin, $f(a)^2 = a^2 = 1$ et $[f(s), f(t)] = [t, s] = 1$. Donc f préserve la présentation de $\mathcal{L}$ donc définit un morphisme. Comme l'application induite est involutive, f est un isomorphisme, et par construction, $f(P, (k, l)) = (P, (l, k))$.

2. On a

$$\begin{aligned}[g(a)^{g(t)}, g(a)] &= [a^{t^{-1}}, a] \\ &= t^{-1}[a, a^t]t \\ &= 1 \quad \text{car } a \text{ et } a^t \text{ commutent}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[g(s), g(a)] &= [st^{-1}, a] \\ &= [t^{-1}s, a] \quad \text{car } [s,t] = 1 \\ &= t^{-1}[s,a]ata^{-1} \\ &= t^{-1}a^t ata^{-1} \\ &= aa^{t^{-1}}a^{-1} \\ &= a^{t^{-1}} \text{car } [a, a^t] = 1 \\ &= g(a)^{g(t)}\end{aligned}$$

Enfin, s et t commutent donc il en est de même pour $g(s), g(t) \in \langle s, t\rangle$ et $g(a)^2 = a^2 = 1$. Donc g définit un morphisme de groupes qui envoie $(P, (k, l))$ sur $P(k, -l-k))$. Comme de plus g est involutif, c'est un isomorphisme.

□

Ainsi, les automorphismes de groupe laissant invariants le noyau parfait, on peut se restreindre sans perte de généralité au cas où le paramètre exceptionnel est de la forme $(k, 0)$.

Définition 4.31. *On pose $M_n = \frac{1}{(1+x)^n}\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, c'est un $(k, 0)$-module.*

Définition 4.32. *Soit M un $(k, 0)$-module. On appelle rang asymptotique de M le rang maximal d'un sous-module de M finiment engendré (noté $rg_{as}(M)$).*

Proposition 4.33. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et Λ un $(k, 0)$-module. Alors $rg_{as}(\Lambda) = rg(\Lambda \cap M_0)$.*

Démonstration. — $\Lambda \cap M_0$ est un sous-module finiment engendré de Λ (car M_0 est lui-même finiment engendré sur un anneau principal), donc par maximalité du rang asymptotique on a $rg(\Lambda \cap M_0) \leq rg_{as}(\Lambda)$.

— Soient $\frac{P_1}{(1+x)^{n_1}}, ..., \frac{P_r}{(1+x)^{n_r}} \in \Lambda$ formant une famille libre. Alors, notant $n = \max_i n_i$, la famille $(1+x)^n \cdot \frac{P_1}{(1+x)^{n_1}}, ..., (1+x)^n \cdot \frac{P_r}{(1+x)^{n_r}}$ forme une famille libre de $\Lambda_{\mathcal{R}} \cap M_0$. Donc $rg(\Lambda \cap M_0) \geq rg_{as}(\Lambda)$.

□

Lemme 4.34. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\Lambda_{\mathcal{R}}$ un $(k, 0)$-module finiment engendré. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Lambda_{\mathcal{R}} \subseteq M_{N_0}$. Il existe une famille finie $\mathcal{F}$ d'éléments de $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}] \setminus M_{N_0}$ telle que pour tout $(k, 0)$-module Λ' non inclus dans M_{N_0} et contenant $\Lambda_{\mathcal{R}}$, $\Lambda' \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Démonstration. Écrivons $k = 2^l k'$, où $l \in \mathbb{N}$ et k' est impair.
Λ' n'étant pas inclus dans $\frac{1}{(1+x)^{N_0}}\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$, il existe $f \in \mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$ non divisible par $(1 + x)$ et $N > N_0$ tels que $\frac{f}{(1+x)^N} \in \Lambda'$.
Soit $M \in \mathbb{N}$ maximal tel que $N - 2^l M > N_0$. Alors

$$\begin{aligned} P &:= (1 + x^k)^M \frac{f}{(1 + x)^N} \\ &= (1 + x^{k'})^{2^l M} \frac{f}{(1 + x)^N} \end{aligned}$$

k' étant impair, 1 a pour multiplicité $2^l M - N < -N_0$ dans P, donc $P \notin M_{N_0}$. En particulier, $P \notin \Lambda_{\mathcal{R}}$.
De plus, par maximalité de M on a $N - 2^l M \leq N_0 + 2^{l+1}$, ainsi $P \in \frac{1}{(1+x)^{N_0+2^{l+1}}}\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$.
On pose alors $\mathcal{F}$ une famille de représentants non nuls de $M_{N_0+2^{l+1}}/M_{N_0}$ (finie car ces deux modules ont rang k). □

Proposition 4.35. *Soit $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ exceptionnel et $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L})$ tel que $\pi(\Lambda) = (k, l)\mathbb{Z}$. On suppose que $\Lambda \cap \mathcal{R} := \Lambda_{\mathcal{R}}$ est finiment engendré. Alors $\Lambda \notin \mathcal{K}(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Par symétrie, on (*cf.* proposition 4.30), on peut supposer $l = 0$. Soit $P_1, ..., P_r$ une famille (k, l)-génératrice de $\Lambda_{\mathcal{R}}$.
Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Lambda_{\mathcal{R}} \subseteq \frac{1}{(1+x)^{N_0}}\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$ et $\mathcal{F}$ finie telle que tout (k, l)-module Λ' contenant $\Lambda_{\mathcal{R}}$ et non inclu dans $\frac{1}{(1+x)^{N_0}}\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$ intersecte non trivialement $\mathcal{F}$ (dont l'existence est fournie par le lemme 4.34). Soit $P \in \mathcal{R}$ tel que $(P, (k, l)) \in \Lambda$.
On pose

$$\mathcal{V} = \{\Lambda' \subseteq \mathcal{L} | P_i \in \Lambda' \cap \mathcal{R} \forall i \in [\![1, r]\!] \ \text{ et } \ (P, (k, l)) \in \Lambda' \ \text{ et } \Lambda' \cap \mathcal{F} = \emptyset\}$$

Pour tout $\Lambda' \in \mathcal{V}$, comme $(P, (k, l)) \in \Lambda'$, $\Lambda' \cap \mathcal{R}$ est un (k, l)-module. En particulier, comme il contient P_i pour tout i, on a $\Lambda_{\mathcal{R}} \subseteq \Lambda' \cap \mathcal{R}$. Il résulte du lemme 4.34 que $\Lambda' \cap \mathcal{R} \subseteq \frac{1}{(1+x)^{N_0}}\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$, qui possède un ensemble dénombrable de sous-modules $\mathrm{Sub}(M_{N_0})$ en tant que module de type fini sur un anneau principal. Enfin, la fonction $\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{V} & \to & \mathrm{Sub}(M_{N_0}) \\ & & \Lambda' & \mapsto & \Lambda' \cap \mathcal{R} \end{array}$ est à fibres dénombrables, donc la dénombrabilité de $\mathrm{Sub}(M_{N_0})$ implique celle de $\mathcal{V}$. Donc $\Lambda \notin \mathcal{K}(\mathcal{L})$.

□

Désormais on fixe (k, l) exceptionnel et par symétrie (*cf.* proposition 4.30) on impose $l = 0$.

Lemme 4.36. *Pour tout n, M_n est d'indice 2 dans M_{n+1}.*

Démonstration. On montre que $M_{n+1}/M_n = \{0 \mod M_n, \frac{1}{(1+x)^n} \mod M_n\}$.
Pour tout $\frac{P}{(1+x)^{n+1}} \in M_{n+1} \setminus M_n$, on effectue la division euclidienne de P par $(1 + x)$ ce qui fournit l'existence de $Q \in M_0$ tel que

$$\frac{P}{(1 + x)^{n+1}} = \frac{Q}{(1 + x)^n} + \frac{1}{(1 + x)^{n+1}}$$

Donc $\frac{P}{(1+x)^{n+1}} = \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \mod M_n$. □

Lemme 4.37. *On écrit $k = 2^l m$, avec m impair. Alors :*

$$\Lambda \cap M_n = \Lambda \cap M_{n+1} \implies \Lambda \cap M_{n+2^l} = \Lambda \cap M_{n+1+2^l}$$

Démonstration. On montre la contraposée : soit $g \in \Lambda \cap M_{n+2^l+1} \setminus M_{n+2^l}$, de sorte que 1 a multiplicité $-n-2^l-1$ dans g. Alors la multiplicité de 1 dans $f := (1+x^k)g \in \Lambda$ est $2^l - n - 2^l - 1 = -n-1$. Donc $f \in \Lambda \cap M_n \setminus M_{n+1}$. □

Cas d'un paramètre impair Dans cette partie, on suppose que k est impair.

Proposition 4.38. *Soit Λ un $(k,0)$-module infiniment engendré. Alors $\langle \Lambda, M_0 \rangle = \mathcal{R}$.*

Démonstration. Soit $\Lambda' = \langle \Lambda, M_0 \rangle$. Le groupe Λ' est infiniment engendré et contient M_0. D'après le lemme 4.36,

$$M_0 \subseteq \Lambda' \cap M_1 \subseteq M_1 \implies \Lambda' \cap M_1 \in \{M_0, M_1\}$$

Si $\Lambda' \cap M_1 = M_0$, alors par récurrence immédiate moyennant le lemme 4.37, $\Lambda' \cap M_n$ est constante donc Λ' est infiniment engendré, ce qui contredit l'hypothèse initiale.
Donc $\Lambda' \cap M_1 = M_1$ et par récurrence immédiate $\Lambda' \cap M_n = M_n$, ainsi $\Lambda' = \mathcal{R}$. □

Corollaire 4.39. *Soit Λ un $(k,0)$-module infiniment engendré de rang asymptotique maximal. Alors $\mathcal{R}/\Lambda$ est fini de cardinal $[M_n : \Lambda \cap M_n]$ pour tout n. De plus, $[M_{n+1} \cap \Lambda : M_n \cap \Lambda] = 2$.*

Proposition 4.40. *Soit Λ un $(k,0)$-module infiniment engendré de rang asymptotique maximal. Alors tout $(k,0)$-module infiniment engendré contenant $\Lambda \cap M_0$ contient Λ entier. En particulier, il existe un nombre fini de tels modules.*

Démonstration. Soit Λ' infiniment engendré contenant $\Lambda \cap M_0$. On pose $\Lambda_i = \Lambda \cap M_i$. Montrons que $\Lambda_i \subseteq \Lambda'$.
On a $\Lambda_0 \subseteq (\Lambda' \cap \Lambda) \cap M_1 \subseteq \Lambda_1$. Or, par le lemme 4.39, $[\Lambda_1 : \Lambda_0] = 2$ donc :

- soit $(\Lambda' \cap \Lambda) \cap M_1 = \Lambda_1$, *i.e.* $\Lambda_1 \subseteq \Lambda'$.
- soit $(\Lambda' \cap \Lambda) \cap M_1 = \Lambda_0$. Dans ce cas, on a $(\Lambda \cap \Lambda') \cap M_0 = (\Lambda \cap \Lambda') \cap M_1$. Mais, Λ' contenant Λ_0, il est de rang asymptotique maximal. Par le lemme 4.39, Λ et Λ' sont donc d'indices finis dans $\mathcal{R}$ donc il en est de même pour $\Lambda \cap \Lambda'$. Ce module est donc de rang asymptotique maximal, donc d'après le lemme 4.39, $[(\Lambda \cap \Lambda') \cap M_0 : (\Lambda \cap \Lambda') \cap M_1] = 2$, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi $\Lambda_1 \subseteq \Lambda'$ et par récurrence immédiate, $\Lambda \subseteq \Lambda'$. Λ' s'identifie donc à un sous-module de $\mathcal{R}/\Lambda$, qui est fini par le lemme 4.39. □

Corollaire 4.41. *Soit Λ un $(k,0)$-module infiniment engendré de rang asymptotique $k-r$. Alors il existe $P_1, ..., P_r \in M_0$ tels que $\Lambda \bigoplus \bigoplus_{i=1}^r \langle P_i \rangle_{k,0}$ soit de rang asymptotique maximal.*

Démonstration. M_0 étant libre sur un anneau principal, on choisit $P_1, ..., P_r \in M_0$ tels que $\Lambda \cap M_0 \bigoplus \bigoplus_{i=1}^r \langle P_i \rangle_{k,0}$ soit d'indice fini dans M_0. Notons $L = \bigoplus_{i=1}^r \langle P_i \rangle_{k,0}$.

Soit $\frac{P}{(1+x)^n} \in (\Lambda \cap M_n) \cap L$. Alors

$$(1+x)^n \cdot_{k,0} \frac{P}{(1+x)^n} = \frac{(1+x^k)^n}{(1+x)^n} P \in (\Lambda \cap M_0) \cap L = 0$$

donc $P = 0$ et $\Lambda \cap M_n \cap L = 0$. En particulier, $\Lambda \bigoplus L$ est de rang asymptotique maximal. $\square$

Corollaire 4.42. *Soit Λ un $(k,0)$-module infiniment engendré de rang asymptotique r et L un sous module de M_0 tel que $\Lambda \bigoplus L$ est de rang asymptotique maximal. Alors tout $(k,0)$-module Λ' infiniment engendré de rang asymptotique r contenant $\Lambda_0 := \Lambda \cap M_0$ vérifie :*

1. $\Lambda' \cap L = 0$
2. $\Lambda \bigoplus L \subseteq \Lambda' \bigoplus L$

Démonstration. Si $\Lambda' \cap L \neq 0$, alors Λ' contient le module engendré par Λ_0 et $\Lambda' \cap L$ qui est de rang strictement supérieur à r puisque $\Lambda \cap L = 0$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Λ'. D'où la première assertion. La seconde résulte alors de la proposition 4.40. $\square$

Proposition 4.43. *Soit Λ un sous-groupe de $\mathcal{L}$ tel que $\pi(\Lambda) = (k,l)\mathbb{Z}$ avec (k,l) exceptionnel et k impair. Alors $\Lambda \notin \mathcal{K}(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Soit Λ un sous-groupe de $\mathcal{L}$ tel que $\pi(\Lambda) = (k,0)\mathbb{Z}$ avec k impair. D'après la proposition 4.35, on peut supposer que Λ est infiniment engendré. On fixe $P \in \mathcal{R}$ tel que $(P,(k,0)) \in \Lambda$. Par récurrence descendante sur le rang asymptotique r de $\Lambda_{\mathcal{R}}$, on montre que $\Lambda \notin \mathcal{K}(\mathcal{L})$. Soit $\mathcal{P}_r$: "Pour tout Λ tel que $\pi(\Lambda) = (k,0)\mathbb{Z}$ avec k impair et $\Lambda \cap R$ de rang asymptotique supérieur ou égal à r, $\Lambda \notin \mathcal{K}(\mathcal{L})$".

Initialisation : Supposons $r = k$. On définit l'ouvert

$$\mathcal{V} = \{\Lambda' \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}) | (P,(k,0)) \in \Lambda' \text{ et } \ \Lambda_{\mathcal{R}} \cap M_0 \subseteq \Lambda'_{\mathcal{R}}\}$$

Alors, d'après le lemme 4.35 on a

$$\begin{aligned}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}(\mathcal{L}) &\subseteq \{\Lambda' \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}) | \Lambda'_{\mathcal{R}} \text{infiniment engendré}, (P,(k,0)) \in \Lambda' \text{et} \Lambda_{\mathcal{R}} \cap M_0 \subseteq \Lambda'_{\mathcal{R}} \cap M_0\} \\ &\subseteq \{\langle \Lambda'_0, (P_n,(l,0))\rangle, l|k, P_n \in \mathcal{R}, \Lambda_{\mathcal{R}} \cap M_0 \subseteq \Lambda'_0 (k,0)\text{-module de rang infini}\}\end{aligned}$$

et ce dernier ensemble est dénombrable d'après le lemme 4.40. Il en résulte que $\mathcal{V}$ est dénombrable donc $\Lambda \notin \mathcal{K}(\mathcal{L})$.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_{r+1}$ vraie et fixons Λ tel que $\pi(\Lambda) = (k,0)\mathbb{Z}$ avec k impair et $\Lambda_{\mathcal{R}}$ de rang asymptotique r. Si $(P,(k,0)) \in \Lambda$, on pose $\mathcal{V} = \{\Lambda' \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L}) | (P,(k,0)) \in \Lambda' \text{et} \Lambda_{\mathcal{R}} \cap M_0 \subseteq \Lambda'_{\mathcal{R}}\}$, qui est un voisinage de Λ. Alors, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}(\mathcal{L}) \subseteq &\{\langle \Lambda'_0, (P_n,(l,0))\rangle, l|k, P_n \in \mathcal{R} \text{ et } \Lambda_{\mathcal{R}} \cap M_0 \subseteq \Lambda'_0 \\ &(k,0)\text{-module infiniment engendré de rang asymptotique } r\}\end{aligned}$$

qui est dénombrable par le lemme 4.42. Donc $\mathcal{V}$ est lui-même dénombrable et par suite $\Lambda \notin \mathcal{K}(\mathcal{L})$.
D'où l'hérédité et le résultat par récurrence. $\square$

Cas d'un paramètre puissance de 2 Dans cette partie, on suppose que $k = 2^l$ avec $l \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 4.44. *Soit Λ un $(k,0)$-module de rang asymptotique r non maximal. Alors Λ est limite de $(k,0)$-modules de rang asymptotique $r+1$.*

Démonstration. $\Lambda \cap M_0 \subseteq M_0$ étant de rang non maximal, on fixe $P \in M_0$ tel que $\Lambda \cap M_0 \cap \langle P \rangle_{k,0} = 0$. Par suite, on a $\Lambda \cap \langle P \rangle_{k,0} = 0$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des irréductibles de $\mathbb{F}_2[x,x^{-1}]$. On a $\Lambda \cap \langle f_n \cdot_{k,0} P\rangle_{k,0} = 0$ et on pose $\Lambda_n = \Lambda \bigoplus \langle f_n \cdot_{k,0} P\rangle_{k,0}$. On a alors :

— $rg(\Lambda_n) = r+1$
— $\Lambda \subseteq \Lambda_n$ pour tout n.
— Si $R \in \Lambda_n$ pour une infinité de n, on a

$$R = \lambda_{\varphi(n)} + (Q_{\varphi(n)} f_{\varphi(n)}) \cdot_{k,0} P \quad (\varphi \text{ extractrice, } \lambda_{\varphi(n)\in\Lambda}, Q_{\varphi(n)} \in \mathbb{F}_2[x,x^{-1}])$$

Ainsi, pour tous $n < m$:

$$\lambda_{\varphi(n)} + (Q_{\varphi(n)} f_{\varphi(n)}) \cdot_{k,0} P = \lambda_{\varphi(m)} + (Q_{\varphi(m)} f_{\varphi(m)}) \cdot_{k,0} P$$

Moyennant $\Lambda \cap \langle P \rangle_{k,0} = 0$, on en déduit :

$$Q_{\varphi(n)} f_{\varphi(n)} =: Q \in \mathbb{F}_2[x,x^{-1}] \text{ constant}$$

Q est alors divisible par une infinité d'irréductibles de $\mathbb{F}_2[x,x^{-1}]$ *i.e.* $Q = 0$. Ainsi $R = \lambda_{\varphi(n)} \in \Lambda$.
Donc $\Lambda_n \to \Lambda$.

□

Définition 4.45. *Soit Λ_n un sous-module de M_n. On dit que Λ_n est prolongeable de façon consistante s'il existe un $(k,0)$-module Λ' contenant strictement Λ_n et tel que $\Lambda' \cap M_n = \Lambda_n$.*

Lemme 4.46. *Λ_n est prolongeable de façon consistante ssi il existe $P \in M_{n+k} \setminus M_n$ tel que $(1+x^k) \cdot_{k,0} P \in \Lambda_n$.*

Démonstration. Supposons que Λ_n est prolongeable de façon consistante en un module Λ. D'après le lemme 4.37, $\Lambda \cap M_{n+k} \nsubseteq M_n$, donc il existe $P \in \Lambda \cap M_{n+k} \setminus M_n$. Comme $P \in M_{n+k}$, on a

$$\begin{aligned}(1+x^k)P &= (1+x) \cdot_{k,0} P \\ &\in \Lambda \cap M_n = \Lambda_n\end{aligned}$$

Réciproquement, on fixe $P = \frac{P_0}{(1+x)^r}$, avec $n < r \leq n+k$ et $P_0 \in M_0$ non divisible par $(1+x)$ tel que $(1+x^k)P \in \Lambda_n$. On pose $\Lambda' = \langle \Lambda_n, P\rangle_{k,0}$, qui contient strictement Λ_n. Montrons que $\Lambda \cap M_n = \Lambda_n$.
Soit $\frac{Q}{(1+x)^n} = \lambda + R(x^k, x^{-k})\frac{P_0}{(1+x)^r}$, avec $\lambda \in \Lambda_n$, $Q, R \in M_0$. On a alors

$$Q(1+x)^{r-n} = \lambda(1+x)^r + R(x^k,x^{-k})P_0$$

Donc $(1+x)$ divise $R(x^k,x^{-k})P_0$, *i.e.* $(1+x)$ divise $R(x^k,x^{-k}) = R(x,x^{-1})^k$. On en déduit que $(1+x)$ divise R, puis que $1+x^k$ divise $R(x^k,x^{-k})$.
Ainsi $\frac{Q}{(1+x)^n} = \lambda + \frac{R(x^k,x^{-k})}{(1+x^k)}(1+x)^k P \in \Lambda_n$ par l'hypothèse faite sur P. □

Lemme 4.47. *Soit $\Lambda_n \subseteq M_n$ de rang supérieur à 2 et vérifiant $\Lambda_n \nsubseteq M_{n-k}$ (condition $\mathcal{C}_n$). Alors Λ_n est prolongeable de façon consistante en deux sous-modules distincts de M_{n+k} de rang supérieur à 2 vérifiant la condition $\mathcal{C}_{n+k}$.*

Démonstration. On prend $P \in \Lambda_n \setminus M_{n-k}$, de sorte que $Q := \frac{P}{(1+x)^k} \in M_{n+k} \setminus M_n$ et $(1+x)^k Q = P \in \Lambda_n$. Donc, d'après le lemme 4.46, $\langle \Lambda_n, Q\rangle_{k,0}$ est une extension consistante de Λ_n.
Observons que, si $\langle \Lambda_n, \frac{P_0}{(1+x)^k}\rangle_{k,0} = \langle \Lambda_n, \frac{Q_0}{(1+x)^k}\rangle_{k,0}$ (avec $P_0, Q_0 \in \Lambda_n$), alors les modules engendrés par P_0 et Q_0 dans le module quotient $\Lambda_n/(1+x^k)\Lambda_n$ ont une intersection non triviale. Comme $rg(\Lambda_n) \geq 2$, ce dernier module est également de rang supérieur à 2, donc il existe $Q \in \Lambda_n$ tel que $\langle P \mod (1+x^k)\Lambda_n\rangle_{k,0} \neq \langle Q \mod (1+x^k)\Lambda_n\rangle_{k,0}$ dans $\Lambda_n/(1+x^k)\Lambda_n$. Quitte à remplacer Q par $P+Q$ on peut également supposer $Q \notin M_{n-k}$, de sorte que $\langle \Lambda_n, \frac{P}{1+x^k}\rangle_{k,0}$ et $\langle \Lambda_n, \frac{Q}{1+x^k}\rangle_{k,0}$ sont deux extensions consistantes différentes de Λ_n.
Enfin, par construction, $\frac{P}{1+x^k}, \frac{Q}{1+x^k} \in M_{n+k} \setminus M_n$, donc ces deux extensions vérifient la propriété $\mathcal{C}_{n+k}$. Comme elles contiennent Λ_n, elles sont de rang supérieur à 2. $\square$

Corollaire 4.48. *Soit $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L})$ tel que $\pi(\Lambda) = (k,l)\mathbb{Z}$ avec (k,l) exceptionnel et k une puissance de 2 différente de 1. On suppose de plus que $\Lambda \cap \mathcal{R}$ est infiniment engendré en tant que (k,l)-module. Alors $\Lambda \in \mathcal{K}(\mathcal{L})$.*

Démonstration. Soit $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L})$ tel que $\pi(\Lambda) = (k,l)\mathbb{Z}$ avec (k,l) exceptionnel et k une puissance de 2. Moyennant le lemme 4.30, on peut supposer que $l = 0$. On écrit $\Lambda = \langle \Lambda_{\mathcal{R}}, (P,(k,0))\rangle$.
On suppose d'abord que $\Lambda_{\mathcal{R}}$ est de rang asymptotique supérieur à 2. D'après le lemme 4.37, $\Lambda_{\mathcal{R}}$ étant infiniment engendré, $\Lambda_{\mathcal{R}} \cap M_n$ vérifie la condition $\mathcal{C}_n$ pour tout n. Le lemme 4.47 et une récurrence immédiate fournissent alors l'existence d'une suite Λ_n de $(k,0)$-modules infiniment engendrés convergeant vers $\Lambda_{\mathcal{R}}$ de façon non stationnaire. D'après le corollaire 4.13, il en résulte que $\langle \Lambda_n, (P,(k,0))\rangle$ converge vers Λ et vérifie les mêmes hypothèses que Λ. Donc, $\Lambda \in \mathcal{K}(\mathcal{L})$.
Si $\Lambda_{\mathcal{R}}$ est de rang asymptotique 1, on utilise le lemme 4.44 pour écrire $\Lambda_{\mathcal{R}}$ comme limite de $(k,0)$-modules infiniment engendrés Λ_n de rang asymptotique 2. De même que précédemment, on a alors $\Lambda = \lim_{n\to\infty} \langle \Lambda_n, (P,(k,0))\rangle$, qui sont dans le noyau parfait d'après la première étape. Donc, $\Lambda \in \mathcal{K}(\mathcal{L})$. $\square$

Nous ne savons pas encore décrire plus précisément le noyau parfait du groupe de Baumslag, mais le fait que ses sous-groupes dont la projection sur $\mathbb{Z}^2$ est de rang 2 ne sont pas dans le noyau parfait nous donne des informations sur son rang de Cantor-Bendixson, que nous présentons dans la dernière section.

4.3 Une minoration du rang de Cantor-Bendixson

Dans cette dernière section, on montre que le rang de Cantor-Bendixson du groupe de Baumslag est infini. Pour ce faire, on montre qu'il existe des sous-groupes de $\mathcal{L}$ dont l'image par π est de rang 2 et qui appartiennent à $\mathrm{Sub}(\mathcal{L})^{(n)}$ pour des entiers n arbitrairement grands.

Définition 4.49. *Pour tout $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L})$ tel que $\pi(\Lambda)$ est de rang 2, on note*

$$e_{\Lambda_{\mathcal{R}}} = \min\left\{k \in \mathbb{N} | x^k \Lambda_{\mathcal{R}} = (1+x)^k \Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}\right\}$$

Remarque 4.50. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $x^k\Lambda_{\mathcal{R}} = (1+x)^k\Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$, alors $e_{\Lambda_{\mathcal{R}}}$ divise k. Il résulte alors de la proposition 4.16 que pour tout $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L})$, l'entier $e_{\Lambda_{\mathcal{R}}}$ divise* $\det(\pi(\Lambda))$.

Proposition 4.51. *Soit e une puissance de 2. Les opérations $x \cdot P = x^e P$ et $(1+x)^{-1} \cdot P = (1+x)^{-e}P$ munissent $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$ d'une structure de $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$-module libre de rang e. On le note $\mathcal{R}^{(e)}$. Une base de ce module est donnée par $1, x, ..., x^{e-1}$.*

Démonstration. L'entier e étant une puissance de 2, on a, dans $\mathbb{F}_2$: $(1+x)^e = 1 + x^e$. Ainsi, la loi de $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$-module sur $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$ définie par $x \cdot P = x^e P$ et $y \cdot P = (1+x)^e P$ descend en une loi de $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$-module (après quotient par l'idéal $(1+x+y)$). Donc cette opération munit bien $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$ d'une structure de $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$-module.
Montrons que la famille $1, x, ..., x^{e-1}$ en est une base :

— Pour tout $0 \leq k < e$, on a $\frac{1}{(1+x)^k} = (1+x)^{-1} \cdot (1+x)^{e-k}$ et $(1+x)^{e-k}$ est combinaison linéaire des polynômes $1, x, ..., x^{e-1}$. Donc d'après la proposition 4.8 (et notant que $x^{le+r} = x^l \cdot x^r$ et $(1+x)^{-(le+r)} = (1+x)^{-l} \cdot (1+x)^{-r}$), la famille est génératrice.

— Soient $P_0, ..., P_{e-1} \in \mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$ vérifiant

$$\sum_{i=0}^{e-1} P_i \cdot x^i = 0$$

i.e.

$$\sum_{i=0}^{e-1} P_i(x^e, x^{-e}, (1+x)^{-e})x^i = 0$$

Moyennant la proposition 4.8 on note

$$\begin{aligned} P_i(x, x^{-1}, (1+x)^{-1}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{i,k} x^k + \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \delta_{i,l}(1+x)^{-l} \\ &=: Q_i(x, x^{-1}) + R_i((1+x)^{-1}) \end{aligned}$$

Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0, e-1]\!]$: $\frac{x^i}{(1+x)^{el}} = \sum_{k=0}^{i} \eta_{i,k}(1+x)^{k-el}$, combinaison linéaire de puissances strictement négatives de $(1+x)$. Ainsi, par unicité de l'écriture canonique :

— les puissances de x dans $P_i \cdot x^i$ sont congrues à i modulo e, ce qui fournit $Q_i = 0$ pour tout i.

— les puissances de $(1+x)^{-1}$ congrues à $e-1$ modulo e sont uniquement dans P_{e-1} ce qui fournit $P_{e-1} = 0$.

On obtient alors $\sum_{i=0}^{e-2} P_i \cdot x^i = 0$, donc après multiplication par x : $\sum_{i=1}^{e-1} P_{i-1} \cdot x^i = 0$. Ainsi, en itérant le raisonnement précédent, il en résulte :

$$P_i = 0 \text{ pour tout } i$$

D'où la liberté de la famille. ☐

Corollaire 4.52. *Pour tout* $\Lambda \in \mathrm{Sub}(\mathcal{L})$ *tel que* $\det(\pi(\Lambda))$ *est une puissance de* 2*, pour tout entier positif* e *qui est une puissance de* 2 *divisible par* $e_{\Lambda_{\mathcal{R}}}$*, on a que* $\Lambda_{\mathcal{R}}$ *est un sous-module de* $\mathcal{R}^{(e)}$*. On note* $r_e(\Lambda)$ *son rang.*

Remarque 4.53. *Par principalité de* $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}, (1+x)^{-1}]$*, on a :* $r_e(\Lambda_{\mathcal{R}}) \leq e$*.*

Proposition 4.54. *Soit* e *une puissance de* 2 *et* $0 < r < e$*. On pose*
$\Omega_{e,r} = \{\Lambda \subseteq \mathcal{L} | \pi(\Lambda) = \langle (e,0),(0,e)\rangle, (0,(e,0)) \in \Lambda, (0,(0,e)) \in \Lambda, e_{\Lambda_{\mathcal{R}}} = e$ *et* $r_e(\Lambda_{\mathcal{R}}) = r\}$
Alors :

1. $\Omega_{e,r} \neq \emptyset$
2. *Pour tout* $\Lambda \in \Omega_{e,r}$*, il existe* $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega_{e,r+1}^{\mathbb{N}}$ *tel que* $\Lambda \subsetneq \Lambda_n$ *pour tout* n *et* $\Lambda_n \to \Lambda$*.*

Démonstration. 1. On pose $\Lambda_0 \subseteq \mathcal{R}^{(e)}$ le sous-module engendré par $1, x, ..., x^{r-1}$ (*i.e.* Λ_0 est le sous-groupe additif de $\mathcal{R}$ engendré par les $P(x^e, x^{-e}, (1+x)^{-e})x^i$, avec $P \in \mathcal{R}$ et $0 \leq i < r$).
Par construction, $e_{\Lambda_0} | e$ et $r_e(\Lambda_0) = r$.
Soit $f = e_{\Lambda_0}$ (en particulier $f \leq e$ et $f \neq 0$). Montrons que $f = e$. Par l'absurde, on suppose que $f < e$.

— Si $r \leq f$ alors, puisque $1 \in \Lambda_0$ et $x^f \Lambda_0 = \Lambda_0$, on a $x^f \in \Lambda_0$, ce qui est impossible par liberté de la famille $(1, x, ..., x^{e-1})$ d'après le lemme 4.51.

— Si $1 \leq f < r$, alors $x^{(r-f)+f} = x^r \in \Lambda_0$ (car $x^{r-f} \in \Lambda_0$ et $x^f \Lambda_0 = \Lambda_0$) ce qui est impossible car $r < e$ et par liberté de la famille $(1, x, ..., x^{e-1})$ (donnée par le lemme 4.51).
On pose alors $\Lambda = \langle \Lambda_0, (0,(e,0)), (0,(0,e))\rangle \subseteq \mathcal{L},$ de sorte que $\Lambda \in \Omega_{e,r}$ (moyennant la remarque 4.14).

2. Soit $r < e$ et $\Lambda \in \Omega_{e,r}$ ($\Lambda_{\mathcal{R}}$ est en particulier un $\mathcal{R}$-sous-module de $\mathcal{R}^{(e)}$). Moyennant le théorème de la base adaptée, on considère une base $P_1, ..., P_e$ de $\mathcal{R}^{(e)}$ telle que $D_1 P_1, ..., D_r P_r$ soit une base de $\Lambda_{\mathcal{R}}$. Soit $(f_n)_n$ la suite des irréductibles de $\mathcal{R}$. On pose $\Lambda_{n,0} = \langle \Lambda_{\mathcal{R}}, f_n \cdot_e P_{r+1}\rangle \subseteq \mathcal{R}^{(e)}$ (en tant que sous-module de $\mathcal{R}^{(e)}$), de sorte que :

— $e_{\Lambda_{n,0}}$ divise e par construction.

— $\Lambda_{\mathcal{R}} \subseteq \Lambda_{n0}$ pour tout n.

— $r_e(\Lambda_{n,0}) = r + 1$

Montrons que $\Lambda_{n,0} \to \Lambda_{\mathcal{R}}$ dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{R})$. Soit φ une extractrice et $P \in \mathcal{R}$ tel que $P \in \Lambda_{\varphi(n),0}$ pour tout n. Alors $P = P_{\varphi(n)} + Q_{\varphi(n)} \cdot_e f_{\varphi(n)} \cdot_e P_{r+1}$ avec $P_{\varphi(n)} \in \Lambda_{\mathcal{R}}$ et $Q_{\varphi(n)} \in \mathcal{R}$ pour tout n donc comme $\langle P_{r+1}\rangle \cap \Lambda_{\mathcal{R}} = 0$, on a $Q_{\varphi(n)} \cdot_e f_{\varphi(n)} \cdot_e P_{r+1}$ constant, mettons égal à Q. On a alors que Q est divisible par $f_{\varphi(n)}(x^e, s^{-e}, (1+x)^{-e}) = f_{\varphi(n)}^e$ (car e est une puissance de 2), donc par une infinité d'irréductibles (car $\mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$ possède lui-même une infinité d'irréductibles) de $\mathcal{R}$. On en déduit que $Q = 0$ et par suite $P \in \Lambda_{\mathcal{R}}$. En définitive, $\Lambda_{n,0} \to \Lambda_{\mathcal{R}}$ dans $\mathrm{Sub}(\mathcal{R})$.
En particulier, comme de plus $\Lambda_{\mathcal{R}} \subseteq \Lambda_{n,0}$, on a $\Lambda_{\mathcal{R}} = \cap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_{n,0}$. Comme $e_{\Lambda_{n,0}}$ divise $e,$ on peut supposer $e_{\Lambda_{n,0}}$ constant égal à e' quitte à extraire. On a alors $x^{e'} \Lambda_{\mathcal{R}} = \Lambda_{\mathcal{R}}$ donc e divise e'. Ainsi $e_{\Lambda_{n,0}} = e$ donc

$$\langle \Lambda_{n,0}, (0,(e,0)), (0,(0,e))\rangle \in \Omega_{e,r+1} \text{ converge vers } \Lambda \text{ dans } \mathrm{Sub}(\mathcal{L}).$$

□

Corollaire 4.55. *On a :* $\mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathrm{Sub}(\mathcal{L})) \geq \omega$

Démonstration. Moyennant la proposition précédente, on a $\cup_{s=1}^{e-r}\Omega_{e,s} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{L})^{(r)}$ pour tout $0 < r \leq e$. En particulier, on a $\Omega_{2^n,1} \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{L})^{2^n-1}$ pour tout n arbitrairement grand. Comme de plus la proposition précédente garantit que $\Omega_{2^n,1}$ contient des sous-groupes dont l'image par π est de rang 2, et que ces derniers ne sont pas dans le noyau parfait d'après le lemme 4.17, il en résulte que

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{L})^{(2^n-1)} \neq \mathcal{K}(\mathcal{L})$$

donc par suite $\mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathcal{L}) \geq 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathcal{L}) \geq \omega.$$

□

Nous ne savons pas encore si le rang de Cantor-Bendixson vaut exactement ω.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat annoncé dans l'introduction :

Corollaire 4.56. *Il existe un groupe hyperbolique de rang de Cantor-Bendixson infini.*

Démonstration. D'après la construction de Rips (*cf* [Rip82]), le groupe de Baumslag étant de présentation finie d'après 4.10, il est quotient d'un groupe hyperbolique G par un sous-groupe normal finiment engendré. Ainsi, la proposition 2.24 fournit

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(G) &\geq \mathrm{rk}_{\mathrm{CB}}(\mathcal{L}) \\ &\geq \omega \quad \text{par le corollaire 4.55}\end{aligned}$$

Donc G fournit un exemple de groupe hyperbolique de rang de Cantor-Bendixson infini.
□

5 Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon encadrant Damien Gaboriau de m'avoir initiée au monde de la recherche mathématique. Je le remercie pour sa disponibilité, sa patience pour répondre à mes questions mais également sa confiance envers certaines idées ainsi que ses précieux conseils de rédaction et d'organisation. Il m'a également permis, malgré les délais, d'assister à la série de conférences "Measured Group Theory, Stochastic Processes on Groups and Borel Combinatorics" au CIRM du 22 au 26 mai 2023 ce qui fut une expérience extrêmement enrichissante pour moi. Je tiens également à adresser mes remerciements à Joshua Frisch pour les deux jours qu'il a passés à Lyon et qui ont engendré une profusion d'idées nouvelles sur le problème. Enfin, je remercie chaleureusement Colin Geniet pour ses conseils avisés sur la soutenance ainsi que Mathieu Mourichoux pour ses remarques sur le rapport et pour les bons moments passés en M7 410 !

Références

[Bau72] Gilbert Baumslag : A finitely presented metabelian group with a free Abelian derived group of infinite rank. *Proc. Am. Math. Soc.*, 35:61–62, 1972. 2, 10, 14

[BGK12] Lewis Bowen, Rostislav Grigorchuk et Rostyslav Kravchenko : Invariant random subgroups of lamplighter groups. *Israel Journal of Mathematics*, 207, 06 2012. 2, 7

[CGM21] Alessandro Carderi, Damien Gaboriau et François Le Maître : On dense totipotent free subgroups in full groups, 2021. arXiv :2009.03080. 6

[CGMS22] Alessandro Carderi, Damien Gaboriau, François Le Maître et Yves Stalder : On the space of subgroups of Baumslag-Solitar groups I : perfect kernel and phenotype, 2022. arXiv :2210.14990. 6

[Kec95] Alexander S. Kechris : *Classical descriptive set theory*, volume 156 de *Grad. Texts Math.* Berlin : Springer-Verlag, 1995. 4, 5

[Rip82] Eliyahu Rips : Subgroups of small cancellation groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14(1):45–47, 01 1982. 2, 32