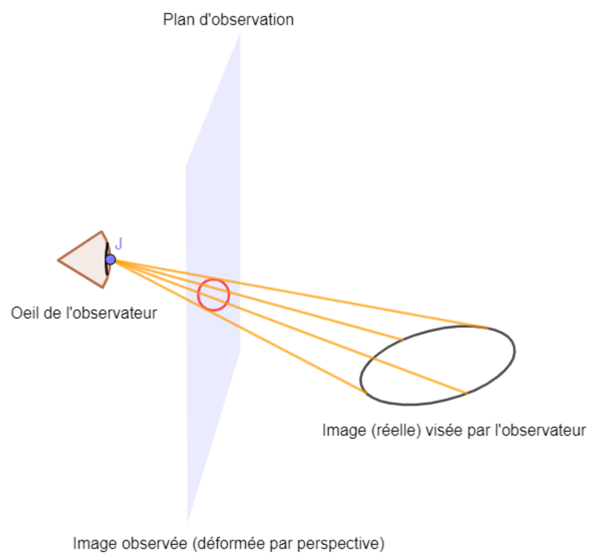
RJMI (Groupe A)

Anamorphose

April 2021

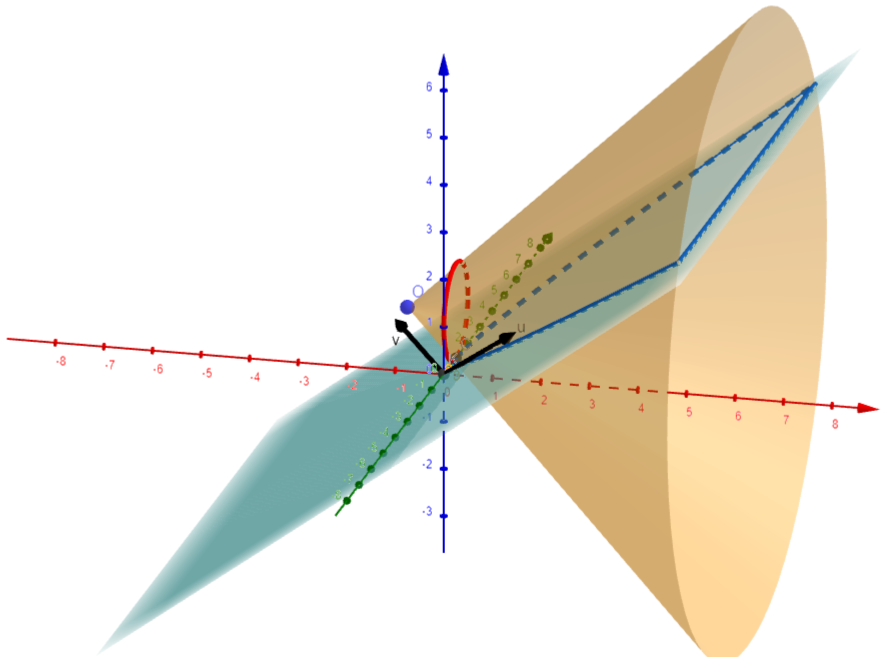
1 Construction

Lorsqu'on observe une image sur le sol, celle-ci nous paraît déformée. Comme les rayons lumineux issus de l'image suivent chacun un trajet rectiligne avant de parvenir à notre oeil, l'image que l'on perçoit est la figure formée par l'intersection d'un plan (fictif) parallèle à l'observateur et ces rayons. Le phénomène est illustré sur le schéma suivant :



Quand on réalise une anamorphose, on veut faire le procédé inverse : au lieu d'étudier l'image déformée d'un cercle sur le sol, on suppose que l'observateur perçoit un cercle et on veut déterminer de quelle image on est parti sur le sol.
Étudions les différentes images possibles en partant d'un cercle dans le plan de l'observateur. On assimile l'espace à un repère orthonormé $\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z}$, on place l'oeil au point $(-1, 1, 1) = -\vec{u_x} + \vec{u_y} + \vec{u_z}$ et on considère un cercle de centre $(0, 1, 1)$ et de rayon 1 dans le plan de l'observateur (c'est-à-dire défini par $(x = 0, (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1)$) et un plan contenant l'axe O_y et formant un angle α avec le plan Oxy. On veut calculer la projection du cercle sur ce plan. (de cette manière, l'image formée sur ce plan sera une anamorphose du cercle ! On s'attend à obtenir une image déformée d'un cercle mais qui, regardée sous l'angle de

l'observateur, formera un cercle). Voici un schéma de la situation (axe rouge : Ox, axe vert : Oy, axe z : Oz) :



La droite reliant O à un point $P = (0, y, z)$ du cercle rouge est paramétrée par t : $(1-t)(-\vec{u_x} + \vec{u_y} + \vec{u_z}) + t(y\vec{u_y} + z\vec{u_z})$. On veut trouver un t réel tel qu'un point de cette forme soit sur le plan bleu.
Exprimons la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ dans la base $(\vec{u}, \vec{u_y}, \vec{v})$ (qui est simplement une rotation d'angle α de la base canonique). On a :

$$\begin{aligned}
\vec{u_x} &= \cos(\alpha)\vec{u} - \sin(\alpha)\vec{v};\\
\vec{u_y} &= \vec{u_y};\\
\vec{u_z} &= \sin(\alpha)\vec{u} + \cos(\alpha)\vec{v}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
(1-t)(-\vec{u_x} + u\,\vec{\ }\,y + \vec{u_z}) + t(y\vec{u_y} + z\vec{u_z}) &= (1-t)(-(\cos(\alpha)\vec{u} - \sin(\alpha)\vec{v}) + \vec{u_y} + (\cos(\alpha)\vec{v} + \sin(\alpha)\vec{u}))\\
&\quad + t(y\vec{u_y} + z(\cos(\alpha)\vec{v} + \sin(\alpha)\vec{u}))
\end{aligned}$$

ce qui donne, après réordonnement des termes

$$((1-t)(-\cos(\alpha)+\sin(\alpha))+tz\sin(\alpha))\vec{u}+((1-t)(\sin(\alpha)+\cos(\alpha)+tz\cos(\alpha))\vec{v}+((1-t)+ty)\vec{u_y}.$$

Nous venons de caractériser tous les points appartenant à la droite passant par O et P un point du cercle fixé, exprimés dans la nouvelle base. Pour trouver l'unique point vérifiant de plus la condition d'appartenance au plan bleu (s'il existe !), on veut annuler sa coordonnée selon $\vec{v}$. On est donc ramenées à résoudre :

$$(1-t)(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))+tz\cos(\alpha)=0.$$

Ce qui se réécrit

$$t(z\cos(\alpha)-\sin(\alpha)-\cos(\alpha))=-(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))$$

i.e

$$t=\frac{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}$$

(sous réserve de non annulation du dénominateur) On a alors :

$$\begin{aligned}
&((1-t)(-\cos(\alpha)+\sin(\alpha))+tz\sin(\alpha))\\
&=t(z\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-\sin(\alpha))+\sin(\alpha)-\cos(\alpha)\\
&=\frac{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}(z\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-\sin(\alpha))+\sin(\alpha)-\cos(\alpha)\\
&=\frac{(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))(z\sin(\alpha)\cos(\alpha)-\sin(\alpha))+(\sin(\alpha)-\cos(\alpha))(\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha))}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}\\
&=\frac{z(\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}\text{(après un (long) développement)}\\
&=\frac{z}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)},
\end{aligned}$$

ce qui nous donne la composante selon $\vec{u}$. On la note U. De même :

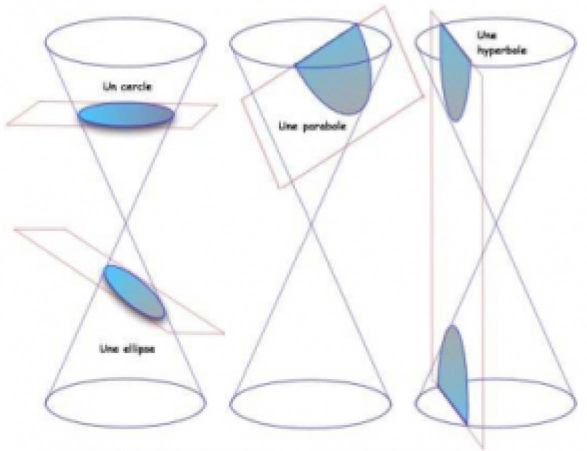
$$\begin{aligned}
(1-t)+ty&=t(y-1)+1\\
&=\frac{(y-1)(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}+1\\
&=\frac{(y-1)(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))+\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}\\
&=\frac{y\sin(\alpha)+y\cos(\alpha)-\sin(\alpha)-\cos(\alpha)+\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}\\
&=\frac{y(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))-z\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)-z\cos(\alpha)}.
\end{aligned}$$

D'où la composante selon $\vec{u_y}$! On la note Y.
En vue de voir comment se traduit la relation $(y-1)^2+(z-1)^2=1$ sur les composantes U et Y, on exprime (y,z) en fonction de (U,Y) :

$$U=\frac{z}{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)-z\cos(\alpha)}.$$

Donc
$$z = (\cos(\alpha) + \sin(\alpha) - z\cos(\alpha))U,$$
ie
$$U(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) = z(1 + U\cos(\alpha)).$$
Ainsi
$$z = \frac{U(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{1 + U\cos(\alpha)}.$$
Faisons de même avec y :
$$\begin{aligned}
Y &= \frac{y(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) - z\cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + \sin(\alpha) - z\cos(\alpha)}\cos(\alpha) + \sin(\alpha) - z\cos(\alpha) \\
&= \frac{y(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))}{\cos(\alpha) + \sin(\alpha) - z\cos(\alpha)} - U\cos(\alpha) \\
&= \frac{y(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))}{\cos(\alpha) + \sin(\alpha) - \cos(\alpha)\frac{U(\cos(\alpha)+\sin(\alpha))}{1+U\cos(\alpha)}} - U\cos(\alpha) \\
&= \frac{y}{1 - \frac{U\cos(\alpha)}{1+U\cos(\alpha)}} - U\cos(\alpha) \quad \text{(après simplification par } \cos(\alpha) + \sin(\alpha) > 0 \text{ car } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \\
&= \frac{y(1 + U\cos(\alpha)}{1 + U\cos(\alpha) - U\cos(\alpha)} - U\cos(\alpha) \\
&= y(1 + U\cos(\alpha) - U\cos(\alpha).
\end{aligned}$$
On en déduit :
$$y = \frac{Y + U\cos(\alpha)}{1 + U\cos(\alpha)}.$$
Il nous reste à traduire la condition $(y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ sur les coordonnées U, Y :
$$\begin{aligned}
&(y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow (\frac{U(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{1 + U\cos(\alpha)} - 1)^2 + (\frac{Y + U\cos(\alpha)}{1 + U\cos(\alpha)} - 1)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{U^2(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2}{(1 + U\cos(\alpha))^2} - \frac{2U(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{1 + U\cos(\alpha)} + \frac{(Y + U\cos(\alpha))^2}{(1 + U\cos(\alpha))^2} - \frac{2(Y + U\cos(\alpha))}{1 + U\cos(\alpha)} + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow U^2(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2 - 2U(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))(1 + U\cos(\alpha)) + (Y + U\cos(\alpha))^2 \\
&- 2(Y + U\cos(\alpha))(1 + U\cos(\alpha)) + (1 + U\cos(\alpha))^2 = 0 \quad \text{(après multiplication par } (1 + U\cos(\alpha))^2) \\
&\Leftrightarrow U^2(1 + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)) - 2U(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) - 2U^2\cos(\alpha)(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + Y^2 \\
&+ 2YU\cos(\alpha) + 2U^2\cos(\alpha)^2 - 2Y - 2YU\cos(\alpha) - 2U\cos(\alpha) - 2U^2\cos(\alpha)^2 + 1 + 2U\cos(\alpha) \\
&+ U^2\cos(\alpha)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow U^2(1 - 2\cos(\alpha)^2) - 2U(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + (Y-1)^2 = 0.
\end{aligned}$$
Ouf !
On remarque d'abord que la formule est cohérente en $\alpha = \frac{\pi}{2}$: on obtient l'équation du cercle de départ, ce qui était attendu.

Ici un "rappel" sur les coniques est nécessaire pour exploiter le résultat obtenu. Une conique est la section d'un plan et d'un cone. Il en existe 3 types : la parabole, l'hyperbole et l'ellipse (le cercle étant un cas particulier de l'ellipse).



Crédit : https://perso.math.univ-toulouse.fr/hippocampe/2017/05/10/lycee-claude-nougaro-caussade-des-coniques/
En coordonnées cartésiennes, l'équation générale d'une conique est $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$.
3 cas se présentent selon le signe de AB :

- Si $AB > 0$, c'est l'équation d'une ellipse ;
- Si $AB = 0$, c'est l'équation d'une parabole ;
- Si $AB < 0$, c'est l'équation d'une hyperbole.

Revenons à notre calcul :
Le terme devant Y^2 est 1, il est toujours positif. Il s'agit donc d'étudier le signe de $1-2\cos(\alpha)^2$ pour déterminer la forme de la projection de notre cercle.

- Si $\cos(\alpha) < \frac{1}{4}$ (*ie* α suffisamment proche de $\frac{\pi}{2}$ (pour celles qui connaissent les fonctions trigonométriques réciproques : $\alpha > \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$), c'est une ellipse. (Cas particulier : cercle pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$)
- Si $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, c'est une parabole.
- Si $\alpha < \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, c'est une hyperbole.

2 Espaces projectifs

Quand on regarde une longue route parallèle, on a l'impression que les droites se croisent "à l'infini" (au point de fuite). Cette notion peut être formalisée en mathématiques par

l'espace projectif.
L'espace projectif réel de dimension 2 est $\mathbb{R}P^2 = \left\{\{(\lambda x, \lambda y, \lambda z), \lambda \in \mathbb{R}^*\}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^{3*}\right\}$.
Autrement dit, c'est l'ensemble $\not\models^*$ quotienté par la relation d'équivalence : (x,y,z) équivalent à (x',y',z') ssi il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $(x',y',z') = \lambda(x,y,z)$. Informellement, c'est le plan $\mathbb{R}^*$ dans lequel on identifie (x,y,z) et $\lambda(x',y',z')$ pour tout $\lambda \neq 0$. On note cet élément $[x:y:z]$ dans l'espace projectif.
L'espace projectif réel de dimension 2 est le plan réel $\mathbb{R}^2$ (appelée partie *affine*) auquel on a ajouté une droite projective (notée $\mathbb{R}P^1$, partie *"à l'infini"*). Voyons pourquoi :
On introduit $U = \{[x:y;z], z \neq 0\}$. Montrons que U est en bijection avec $\mathbb{R}^2$.
"Rappel" sur les bijections : une fonciton $f : X \to Y$ est :

- injective si $f(x) = f(y) \implies x = y$ (Exemple : la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 est non injective car $f(1) = f(-1)$ mais $1 \neq -1$. Mais la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 est injective car $x^2 = y^2 \implies \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \implies |x| = |y| \implies x = y$ (car $x, y \leqslant 0$).

- surjective si $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$, $y = f(x)$ (Exemple : la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 n'est pas surjective car $-1 \neq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (puisque nécessairement $x^2 \leqslant 0$). Mais la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à x associe x^2 est surjective car $y = f(\sqrt{y})$ $\forall y \leqslant 0$).

- bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$.
  Dans ce cas on peut identifier les ensembles X et Y via cette fonction. De façon équivalente, il existe une fonction $g : Y \to X$ vérifiant $f \circ g = Id_Y$ et $g \circ f = Id_X$ et on dit que g est la réciproque de f (noté $g = f^{-1}$).

On pose $\begin{array}{cccc} f & : & U & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & [x:y:z] & \mapsto & (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & U \\ & & (x,y) & \mapsto & [x:y:1] \end{array}$
Nous avons une première chose à vérifier : c'est la bonne définition de f. En effet, quand vous définissez une fonction (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par exemple, vous ne pouvez pas avoir deux valeurs différentes pour $f(2)$; ici, c'est la même chose. Les éléments $[x:y:z]$ et $[\lambda \cdot x : \lambda \cdot y : \lambda \cdot z]$ doivent être envoyés sur la même image dans $\mathbb{R}^2$, puisqu'ils sont égaux dans $\mathbb{R}P^2$!). Par exemple, nous n'aurions pas pu définir la fonction $f([x:y:z]) = (x,y)$, car $f([1:0:0]) = (1,0)$, $f([2:0:0]) = (2,0)$ et comme $[1:0:0] = [2:0:0]$, on devrait avoir $f([1:0:0]) = f([2:0:0])$, ce qui est faux ici). Ici, nous n'avons pas de problème de définition : si $[\lambda x : \lambda y : \lambda z] = [x:y:z]$, alors $\left(\frac{\lambda x}{\lambda z}, \frac{\lambda y}{\lambda z}\right) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$.
Montrons que f et g sont réciproques l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} f(g(x,y)) &= f([x:y:1]) \\ &= (\frac{x}{1}, \frac{y}{1}) \\ &= (x,y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f([x:y:z])) &= g\left(\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)\right) \\ &= \left[\frac{x}{z}:\frac{y}{z}:1\right] \\ &= \left[z\cdot\frac{x}{z}:z\cdot\frac{y}{z}:z\cdot 1\right] \\ &= [x:y:z]. \end{aligned}$$

On a donc grandement simplifié l'étude de $\mathbb{R}P^2$ en identifiant U à $\mathbb{R}^2$. Cependant, U n'est pas $\mathbb{R}P^2$. Les points qui n'appartiennent pas à U sont ceux de la forme $[x:y:0]$. On identifie cet ensemble à $\mathbb{R}P^1$ (défini comme $\mathbb{R}P^2$, mais avec deux coordonnées au lieu de 3 (l'identification étant donnée par l'application naturelle $[x:y:0]\to[x:y]$ de réciproque $[x:y]\to[x:y:0]$). De même que précédemment, on montre que $\mathbb{R}P^1$ s'identifie à $\mathbb{R}$ auquel on a ajouté les points $\{[x:0],x\in\mathbb{R}^*\}$. Mais ces points sont tous égaux à $[1:0]$ par définition de l'espace projectif !

Conclusion : l'espace projectif réel de dimension 2 est la réunion d'une partie affine $\mathbb{R}^2$ à laquelle on a ajouté une droite projective (la partie "à l'infini"), elle-même constituée de la droite réelle $\mathbb{R}$ à laquelle on a ajouté un "point à l'infini".

Pourquoi parle-t-on de point "à l'infini" ? Si $x\in\mathbb{R}$, on a vu que x s'identifiait à $[x:1]=\left[1:\frac{1}{x}\right]$. Quand on fait tendre x vers l'infini, $\left[1:\frac{1}{x}\right]$ va tendre vers $[1:0]$, qui est précisément le point qu'on a dû rajouter à la droite réelle pour obtenir la droite projective.

Maintenant voyons un résultat tout à fait surprenant qui fait échos au problème initial : deux droites parallèles de $\mathbb{R}^2$ se plongent dans $\mathbb{R}P^2$ en deux droites concourantes ! (En fait, on peut montrer plus généralement que dans l'espace projectif, deux droites distinctes s'intersectent en un unique point ; c'est ce qu'on va faire ici).

Rappelons qu'une droite de $\mathbb{R}^2$ est donnée par une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$). Dans l'espace projectif, une droite projective est donnée par $ax+by+cz=0$ (l'ensemble des $[x:y:z]\in\mathbb{R}P^2$ vérifiant cette condition est correctement défini : en effet, pour tout λ réel non nul, $ax+by+cz=0\Leftrightarrow\lambda(ax+by+cz)=0\Leftrightarrow a(\lambda x)+b(\lambda y)+c(\lambda z)=0$.

Soient $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ deux droites de $\mathbb{R}^2$. On les plonge dans $\mathbb{R}P^2$ via l'identification réalisée précédemment, c'est-à-dire en deux droites projectives $ax+by+cz=0$ et $a'x+b'y+c'z=0$. On cherche $[x:y:z]\in\mathbb{R}P^2$ appartenant à ces deux droites, c'est à dire vérifiant le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz &=& 0 \\ a'x+b'y+c'z &=& 0 \end{array}\right.$$

On multiplie la première ligne par a' et on remplace $a'x$ par l'expression donnée par la deuxième ligne ce qui fournit $a(-b'y-c'z)+by+cz=0$, soit $y(a'b-b'a)=z(c'a-ca')$. De même, on multiplie la première ligne par b' et on remplace $b'y$ par son expression donnée par la deuxième ligne ce qui fournit $b'ax+b(-a'x-c'z)+b'cz=0$, c'est-à-dire $x(ab'-ba')=z(bc'-b'c)$. Fixons par exemple $z=a'b-b'a$ (licite car on travaille dans l'espace projectif et donc z est défini *à un facteur multiplicatif près* ; il faudra seulement faire attention au fait que le résultat final devra être non nul). On a alors $y=ac'-a'c$ et $x=b'c-bc'$. Il reste à vérifier que $(b'c-bc',ac'-a'c,ba'-b'a)\neq(0,0,0ř$; cela résulte du fait que les droites sont

distinctes.
Bilan : L'unique point d'intersection des deux droites projectives est $[b'c - bc' : ac' - a'c : ba' - b'a]$.

3 Birapport

Partie non abordée pendant les RJMI. Je vous laisse googler tout ça si ça vous intéresse, n'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.