Anamorphose

RJMI 2020 - Sasha Bontemps

March 2021

1 Présentation

L'anamorphose est un procédé de perspective largement employé pendant la Renaissance donnant des résultats tout à fait surprenants. Observez bien ce tableau de Hans Holbein ; que remarquez-vous ?

Crédit : Wikipédia

À première vue, ce tableau réalisé en 1533 semble représenter deux ambassadeurs entourés d'objets révélateurs de l'avancée de la connaissance humaine à l'époque : globe terrestre, luth, livres imprimés, cadran solaire, etc. Seule une forme étrange au premier plan semble briser l'harmonie du tableau. Le lien avec les maths ? Placez vous désormais à droite du tableau de sorte à ce que votre regard soit rasant au tableau et

vous verrez se dévoiler une nouvelle figure à partir de cette forme : un crâne humain ! De plus c'est désormais le reste du tableau qui est totalement déformé et ce crâne devient la seule forme identifiable. Sans doute l'auteur a-t-il voulu dénoncer la vanité du luxe, que la conscience de la mort anéantit tout à fait. Ce tableau est ce qu'on appelle un "memento mori" (souviens-toi que tu vas mourir), typique des oeuvres religieuses de l'époque.
Cet atelier vise à comprendre comment se construit une telle anamorphose (dite *plane*) et à appliquer les mathématiques à la perspective.

Prérequis : Bases de trigonométrie, nombres complexes, calculs algébriques, géométrie dans l'espace Avertissement : le contenu des questions peut varier en fonction de la participation des étudiantes, en particulier si elles désirent approfondir un point particulier ou si elles proposent des solutions auxquelles je n'avais pas pensé.

2 Construction

1) On modélise l'oeil par un point et on considère que la lumière parvient à l'oeil en suivant une trajectoire rectiligne, dans toutes les directions. En s'appuyant sur un schéma, proposer une explication à la déformation des images du point de vue de l'observateur.
2) En s'appuyant sur les remarques précédentes, proposer une méthode de construction de l'anamorphose de Holbein. Quelle sera l'image d'un cercle par cette anamorphose ? (Faire les calculs dans le cas où l'oeil se trouve en position $(-2, 0, 0)$ et où le plan de projection forme un angle α avec le plan horizontal). Tracer l'allure de la courbe obtenue. Que se passe-t-il quand α varie ?
3) La projection construite précédemment conserve-t-elle les distances ?

3 Espaces projectifs et perspective

1) Supposons qu'un observateur soit face à une route parallèle. De son point de vue, la route est-elle parallèle ? Si non, en quel(s) point(s) les droites parallèles se croisent-elles ?
La formalisation de cette notion mathématique s'appelle *espace projectif*. L'espace projectif réel de dimension 2, noté $\mathbb{R}P^2$, est l'ensemble des vecteurs réels (u, v, w) identifiés à homothétie près. On note ces vecteurs $[u : v : w]$.
Exemple : Dans l'espace projectif, $[1 : 2 : 3] = [2 : 4 : 6]$*, mais* $[1 : 0 : 0] \neq [0 : 1 : 0]$.
2) Pourquoi dit-on que l'espace projectif est la donnée du plan complexe et "d'un

point à l'infini" ?
3) Une droite de l'espace projectif est donnée par $\left\{[x:y:z]\in\mathbb{R}P^1, ax+by+cz=0\right\}$, où a,b,c sont des réels fixés. Montrer que cet ensemble est correctement défini. Montrer que deux droites s'intersectent en un unique point.
4) En déduire que deux droites parallèles du plan $\mathbb{R}^2$ se plongent dans $\mathbb{R}P^2$ en deux droites concourantes en un unique point.

4 Birapport

Jusqu'à la fin du sujet, on se place dans la plan $\mathbb{R}^2$, qu'on identifie à $\mathbb{C}$ et on identifie chaque point P du plan réel à son affixe z_P dans le plan complexe. On appelle birapport de quatre points du plan A,B,C,D, et on note $[A:B:C:D]$ le nombre complexe $\dfrac{z_A-z_C}{z_A-z_D}\times\dfrac{z_B-z_D}{z_B-z_C}$.
1) À quelle condition nécessaire et suffisante le birapport de A,B,C,D est-il correctement défini ?
2) Une perspective d'une droite D sur D' est un ensemble de quatre droites distinctes concourantes en un point extérieur à D et D' et qui coupent D et D' en un point chacune (faire un dessin), notés A,B,C,D et A',B',C',D'. Montrer que la perspective conserve le birapport, *ie* que $[A:B:C:D]=[A':B':C':D']$.
Conclusion : la perspective déforme les distances mais nous parvenons toujours à évaluer les distances relatives entre objets !