

Noyau parfait des groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Sasha Bontemps

23 janvier 2025

Plan de l'exposé

- 1 Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable
 - Topologie de Chabauty
 - Dessine-moi un sous-groupe !
 - Noyau parfait et dynamique
 - Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

- 2 Groupes de Baumslag-Solitar généralisés
 - Définition
 - Décomposition du noyau parfait

Plan de l'exposé

1 Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

- Topologie de Chabauty
- Dessine-moi un sous-groupe !
- Noyau parfait et dynamique
- Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

2 Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

- Définition
- Décomposition du noyau parfait

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Cadre : Γ un groupe infini dénombrable.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Cadre : Γ un groupe infini dénombrable.
- $\text{Sub}(\Gamma) \hookrightarrow \{0, 1\}^\Gamma$ fermé du Cantor.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Cadre : Γ un groupe infini dénombrable.
- $\text{Sub}(\Gamma) \hookrightarrow \{0, 1\}^\Gamma$ fermé du Cantor.
- Base de voisinages

$$\mathcal{V}(O, I) = \{\Lambda \leq \Gamma \mid I \subseteq \Lambda, O \cap \Lambda = \emptyset\}$$

pour tous sous-ensembles finis $I, O \subseteq \Gamma$.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Cadre : Γ un groupe infini dénombrable.
- $\text{Sub}(\Gamma) \hookrightarrow \{0, 1\}^\Gamma$ fermé du Cantor.
- Base de voisinages

$$\mathcal{V}(O, I) = \{\Lambda \leq \Gamma \mid I \subseteq \Lambda, O \cap \Lambda = \emptyset\}$$

pour tous sous-ensembles finis $I, O \subseteq \Gamma$.

- Topologie de la convergence simple : $\Lambda_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \Lambda$ ssi pour tout $\lambda \in \Lambda$ (resp. $\lambda \notin \Lambda$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \in \Lambda_n$ (resp. $\lambda \notin \Lambda_n$) pour tout $n > n_0$.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Exemples :
 - L'ensemble des sous-groupes finiment engendrés de Γ est dense dans $\text{Sub}(\Gamma)$.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Exemples :
 - L'ensemble des sous-groupes finiment engendrés de Γ est dense dans $\text{Sub}(\Gamma)$.
 - Dans $\text{Sub}(\mathbb{Z})$, l'ensemble des sous-groupes non isolés est

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Exemples :
 - L'ensemble des sous-groupes finiment engendrés de Γ est dense dans $\text{Sub}(\Gamma)$.
 - Dans $\text{Sub}(\mathbb{Z})$, l'ensemble des sous-groupes non isolés est

$$\{\{0\}\}!$$

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Exemples :

- L'ensemble des sous-groupes finiment engendrés de Γ est dense dans $\text{Sub}(\Gamma)$.
- Dans $\text{Sub}(\mathbb{Z})$, l'ensemble des sous-groupes non isolés est

$$\{\{0\}\}!$$

$$\text{ainsi } \text{Sub}(\mathbb{Z}) \simeq \overline{\left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}}.$$

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Exemples :

- L'ensemble des sous-groupes finiment engendrés de Γ est dense dans $\text{Sub}(\Gamma)$.
- Dans $\text{Sub}(\mathbb{Z})$, l'ensemble des sous-groupes non isolés est

$$\{\{0\}\}!$$

$$\text{ainsi } \text{Sub}(\mathbb{Z}) \simeq \overline{\left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}}.$$



Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Topologie de Chabauty

- Exemples :
 - L'ensemble des sous-groupes finiment engendrés de Γ est dense dans $\text{Sub}(\Gamma)$.
 - Dans $\text{Sub}(\mathbb{Z})$, l'ensemble des sous-groupes non isolés est

$$\{\{0\}\}!$$

$$\text{ainsi } \text{Sub}(\mathbb{Z}) \simeq \overline{\left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}}.$$



Proposition

Si Γ est finiment engendré, ses sous-groupes d'indice fini sont isolés.

Plan de l'exposé

1 Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

- Topologie de Chabauty
- **Dessine-moi un sous-groupe !**
- Noyau parfait et dynamique
- Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

2 Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

- Définition
- Décomposition du noyau parfait

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Dessine-moi un sous-groupe !

- $\Gamma = \langle S \rangle$, S système générateur (fini par exemple).

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Dessine-moi un sous-groupe !

- $\Gamma = \langle S \rangle$, S système générateur (fini par exemple).
- On a une correspondance

$$\text{Sub}(\Gamma) \leftrightarrow \{ \text{actions transitives pointées } (X, x) \curvearrowright^\alpha \Gamma \}$$

$$\Lambda \mapsto (\Lambda \backslash \Gamma, \Lambda) \curvearrowright^\alpha \Gamma$$

$$\text{Stab}_\alpha(x) \leftarrow (X, x) \curvearrowright^\alpha \Gamma$$

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Dessine-moi un sous-groupe !

- $\Gamma = \langle S \rangle$, S système générateur (fini par exemple).
- On a une correspondance

$$\text{Sub}(\Gamma) \leftrightarrow \{ \text{actions transitives pointées } (X, x) \curvearrowright^\alpha \Gamma \}$$

$$\Lambda \mapsto (\Lambda \backslash \Gamma, \Lambda) \curvearrowright^\alpha \Gamma$$

$$\text{Stab}_\alpha(x) \leftarrow (X, x) \curvearrowright^\alpha \Gamma$$

- À chaque action transitive pointée $(X, x_0) \curvearrowright^\alpha \Gamma$ est associée un **graphe de Schreier**. Les sommets sont les éléments de X , et on met une arête étiquetée s entre x et $\alpha(s)(x)$ pour tous $(x, s) \in X \times S$. Il est pointé en x_0 .

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

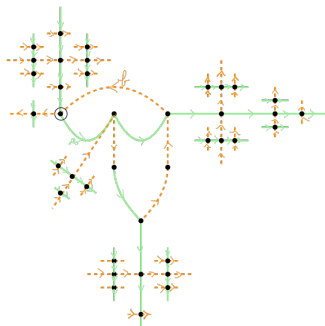
Dessine-moi un sous-groupe !

- Exemple : $\Gamma = \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle, \Lambda = \langle a^2b, abab^3 \rangle$.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Dessine-moi un sous-groupe !

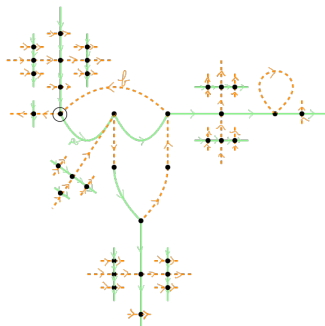
- Exemple : $\Gamma = \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle, \Lambda = \langle a^2b, abab^3 \rangle$.
Graphe de Schreier de Λ :



Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Dessine-moi un sous-groupe !

- Exemple : $\Gamma = \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle, \Lambda = \langle a^2b, abab^3 \rangle$.
Graphe de Schreier de $\langle \Lambda, a^nba^{-n} \rangle$ ($n = 4$ ici) :



Plan de l'exposé

1 Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

- Topologie de Chabauty
- Dessine-moi un sous-groupe !
- **Noyau parfait et dynamique**
- Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

2 Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

- Définition
- Décomposition du noyau parfait

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Théorème (Cantor-Bendixson)

Il existe une unique décomposition $\text{Sub}(\Gamma) = \mathcal{K}(\Gamma) \sqcup C$ en

- un ensemble dénombrable C ;
- un fermé sans point isolé $\mathcal{K}(\Gamma)$.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Théorème (Cantor-Bendixson)

Il existe une unique décomposition $\text{Sub}(\Gamma) = \mathcal{K}(\Gamma) \sqcup C$ en

- un ensemble dénombrable C ;
- un fermé sans point isolé $\mathcal{K}(\Gamma)$.

Exemples :

- $\mathcal{K}(\Gamma) = \emptyset$ si Γ est abélien de type fini.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Théorème (Cantor-Bendixson)

Il existe une unique décomposition $\text{Sub}(\Gamma) = \mathcal{K}(\Gamma) \sqcup C$ en

- un ensemble dénombrable C ;
- un fermé sans point isolé $\mathcal{K}(\Gamma)$.

Exemples :

- $\mathcal{K}(\Gamma) = \emptyset$ si Γ est abélien de type fini.
- Connu pour les groupes abéliens quelconques [Cornulier, Guyot Pitsch].

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Théorème (Cantor-Bendixson)

Il existe une unique décomposition $\text{Sub}(\Gamma) = \mathcal{K}(\Gamma) \sqcup C$ en

- un ensemble dénombrable C ;
- un fermé sans point isolé $\mathcal{K}(\Gamma)$.

Exemples :

- $\mathcal{K}(\Gamma) = \emptyset$ si Γ est abélien de type fini.
- Connu pour les groupes abéliens quelconques [Cornulier, Guyot Pitsch].
- Connu pour les lamplighter [Bowen, Grigorchuk, Kravchenko].

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Théorème (folklore)

$$\mathcal{K}(\mathbb{F}_2) = \text{Sub}_{[\infty]}(\mathbb{F}_2).$$

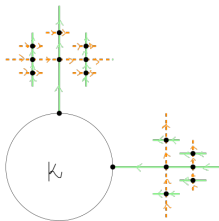
Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Théorème (folklore)

$$\mathcal{K}(\mathbb{F}_2) = \text{Sub}_{[\infty]}(\mathbb{F}_2).$$

Preuve : sous-groupe d'indice infini $\leftrightarrow$ graphe de Schreier infini !



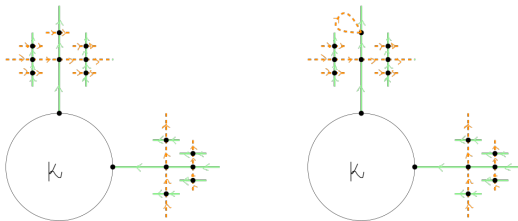
Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Théorème (folklore)

$$\mathcal{K}(\mathbb{F}_2) = \text{Sub}_{[\infty]}(\mathbb{F}_2).$$

Preuve : sous-groupe d'indice infini $\leftrightarrow$ graphe de Schreier infini !



Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Définition

Une action d'un groupe G sur un espace Polonais X est topologiquement transitive si pour tous ouverts U, V non vides de X , il existe $g \in G$ tel que $g \cdot U \cap V \neq \emptyset$.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Définition

Une action d'un groupe G sur un espace Polonais X est topologiquement transitive si pour tous ouverts U, V non vides de X , il existe $g \in G$ tel que $g \cdot U \cap V \neq \emptyset$.

- Remarque : équivalent à l'existence d'une orbite dense.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Définition

Une action d'un groupe G sur un espace Polonais X est topologiquement transitive si pour tous ouverts U, V non vides de X , il existe $g \in G$ tel que $g \cdot U \cap V \neq \emptyset$.

- Remarque : équivalent à l'existence d'une orbite dense.
- L'action par conjugaison de Γ préserve $\mathcal{K}(\Gamma)$.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Définition

Une action d'un groupe G sur un espace Polonais X est topologiquement transitive si pour tous ouverts U, V non vides de X , il existe $g \in G$ tel que $g \cdot U \cap V \neq \emptyset$.

- Remarque : équivalent à l'existence d'une orbite dense.
- L'action par conjugaison de Γ préserve $\mathcal{K}(\Gamma)$.

Théorème (folklore)

L'action de $\mathbb{F}_2$ sur $\mathcal{K}(\mathbb{F}_2)$ est topologiquement transitive.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

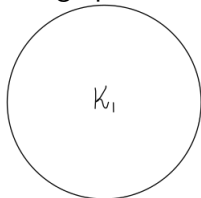
Noyau parfait et dynamique

Preuve : conjuguer un sous-groupe $\leftrightarrow$ changer de point base dans son graphe de Schreier !

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Preuve : conjuguer un sous-groupe $\leftrightarrow$ changer de point base dans son graphe de Schreier !

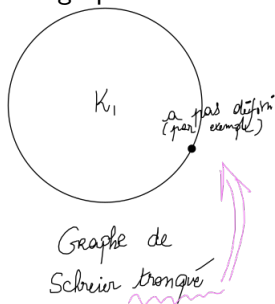


Graphe de
Schreier tronqué

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

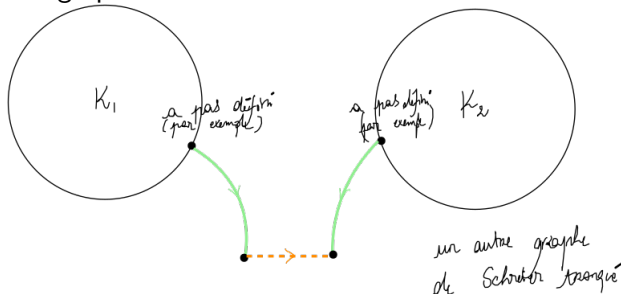
Preuve : conjuguer un sous-groupe $\leftrightarrow$ changer de point base dans son graphe de Schreier !



Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

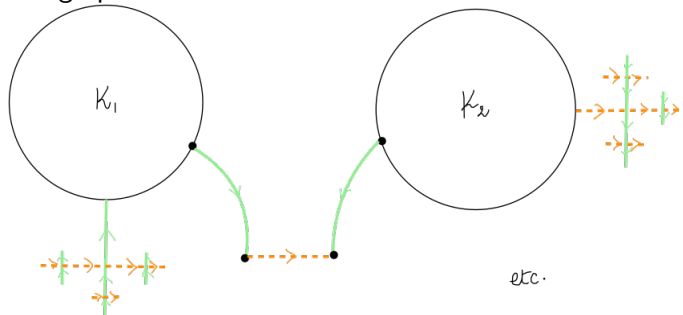
Preuve : conjuguer un sous-groupe $\leftrightarrow$ changer de point base dans son graphe de Schreier !



Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Noyau parfait et dynamique

Preuve : conjuguer un sous-groupe $\leftrightarrow$ changer de point base dans son graphe de Schreier !



Plan de l'exposé

1 Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

- Topologie de Chabauty
- Dessine-moi un sous-groupe !
- Noyau parfait et dynamique
- Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

2 Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

- Définition
- Décomposition du noyau parfait

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

Définition

Une action d'un groupe Γ (minimale, irréductible) sur un arbre orienté $\mathcal{T}$ est acylindrique s'il existe $R > 0$ tel que le stabilisateur de tout chemin de longueur $\geq R$ est trivial.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

Définition

Une action d'un groupe Γ (minimale, irréductible) sur un arbre orienté $\mathcal{T}$ est acylindrique s'il existe $R > 0$ tel que le stabilisateur de tout chemin de longueur $\geq R$ est trivial.

Exemples :

- les groupes libres agissant sur leur graphe de Cayley.

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

Définition

Une action d'un groupe Γ (minimale, irréductible) sur un arbre orienté $\mathcal{T}$ est acylindrique s'il existe $R > 0$ tel que le stabilisateur de tout chemin de longueur $\geq R$ est trivial.

Exemples :

- les groupes libres agissant sur leur graphe de Cayley.
- les groupes finiment engendrés à une infinité de bouts n'ayant pas de sous-groupe normal fini non trivial (Stallings).

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

Définition

Une action d'un groupe Γ (minimale, irréductible) sur un arbre orienté $\mathcal{T}$ est acylindrique s'il existe $R > 0$ tel que le stabilisateur de tout chemin de longueur $\geq R$ est trivial.

Exemples :

- les groupes libres agissant sur leur graphe de Cayley.
- les groupes finiment engendrés à une infinité de bouts n'ayant pas de sous-groupe normal fini non trivial (Stallings).

Si $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}$, on note

$$\text{Sub}_\infty(\Gamma, \mathcal{T}) = \{\Lambda \leq \Gamma \mid \Lambda \backslash \mathcal{T} \text{ est infini}\}.$$

Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable

Groupes agissant sur des arbres : état de l'art

Théorème (Azuelos, Gaboriau, 2023)

Soit Γ dont l'action sur un arbre orienté $\mathcal{T}$ est minimale, irréductible et acylindrique. Alors

- $\overline{\text{Sub}_\infty(\Gamma, \mathcal{T})} \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$;
- Γ agit topologiquement transitivement sur $\overline{\text{Sub}_\infty(\Gamma, \mathcal{T})}$.

Plan de l'exposé

- 1 Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable
 - Topologie de Chabauty
 - Dessine-moi un sous-groupe !
 - Noyau parfait et dynamique
 - Groupes agissant sur des arbres : état de l'art
- 2 Groupes de Baumslag-Solitar généralisés
 - Définition
 - Décomposition du noyau parfait

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

Définition

Un groupe de Baumslag Solitar généralisé (GBS) est un groupe agissant de façon cocompacte sur un arbre orienté avec stabilisateurs d'arêtes et de sommets cycliques infinis.

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

Définition

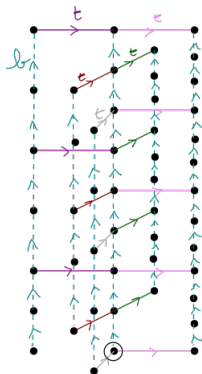
Un groupe de Baumslag Solitar généralisé (GBS) est un groupe agissant de façon cocompacte sur un arbre orienté avec stabilisateurs d'arêtes et de sommets cycliques infinis.

Exemple : Les groupes de Baumslag-Solitar !

$$BS(m, n) = \langle b, t \mid tb^mt^{-1} = b^n \rangle.$$

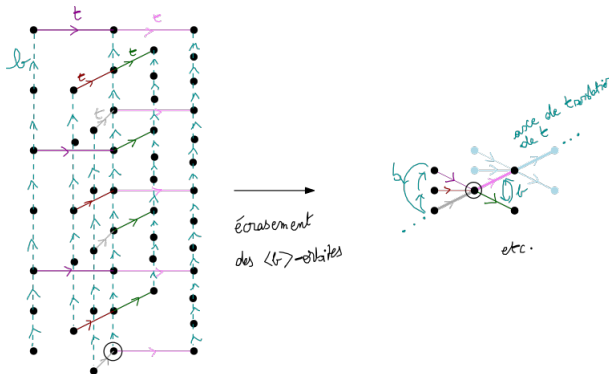
Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition



Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition



Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

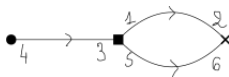
Définition

- Un GBS Γ est le **groupe fondamental** d'un **graphe de groupes** $\mathcal{H}$ (graphe fini orienté dont les demi-arêtes sont étiquetées par des entiers). À $\mathcal{H}$ est associé un unique **arbre de Bass-Serre** $\mathcal{T}$.

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

- Un GBS Γ est le **groupe fondamental** d'un **graphe de groupes** $\mathcal{H}$ (graphe fini orienté dont les demi-arêtes sont étiquetées par des entiers). À $\mathcal{H}$ est associé un unique **arbre de Bass-Serre** $\mathcal{T}$.
- Exemple de graphe de groupes $\mathcal{H}$:



Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

Construction de $\Gamma = \pi_1(\mathcal{H})$:

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

Construction de $\Gamma = \pi_1(\mathcal{H})$:

- 1 Choix d'un arbre couvant T de $\mathcal{H}$;

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

Construction de $\Gamma = \pi_1(\mathcal{H})$:

- 1 Choix d'un arbre couvant T de $\mathcal{H}$;
- 2 Générateurs de Γ : a_v pour tout sommet v et t_e pour toute arête e de $\mathcal{H}$;

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

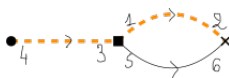
Construction de $\Gamma = \pi_1(\mathcal{H})$:

- ① Choix d'un arbre couvant T de $\mathcal{H}$;
- ② Générateurs de Γ : a_v pour tout sommet v et t_e pour toute arête e de $\mathcal{H}$;
- ③ Relations :
 - $t_{\bar{e}} = t_e^{-1}$;
 - $t_e = 1$ si $e \in T$;
 - pour toute arête e étiquetée k en sa source v et l en son but w , on a $t_e a_v^k t_e^{-1} = a_w^l$.

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

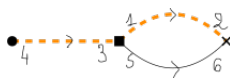
Dans notre exemple, avec pour choix de T le sous-arbre rouge en pointillés



Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

Dans notre exemple, avec pour choix de T le sous-arbre rouge en pointillés



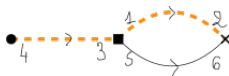
on a

$$\pi_1(\mathcal{H}) = \langle a, b, c, t \mid a^4 = b^3, b = c^2, tb^5t^{-1} = c^6 \rangle$$

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

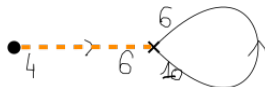
Dans notre exemple, avec pour choix de T le sous-arbre rouge en pointillés



on a

$$\pi_1(\mathcal{H}) = \langle a, b, c, t \mid a^4 = b^3, b = c^2, tb^5t^{-1} = c^6 \rangle$$

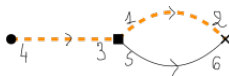
qui est aussi le groupe fondamental du graphe de groupes suivant



Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Définition

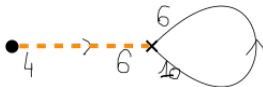
Dans notre exemple, avec pour choix de T le sous-arbre rouge en pointillés



on a

$$\pi_1(\mathcal{H}) = \langle a, b, c, t \mid a^4 = b^3, b = c^2, tb^5t^{-1} = c^6 \rangle$$

qui est aussi le groupe fondamental du graphe de groupes suivant



On s'intéresse aux $\mathcal{H}$ réduits (les seules arêtes portant une étiquette ± 1 sont des boucles).

Plan de l'exposé

- 1 Espace des sous-groupes d'un groupe dénombrable
 - Topologie de Chabauty
 - Dessine-moi un sous-groupe !
 - Noyau parfait et dynamique
 - Groupes agissant sur des arbres : état de l'art
- 2 Groupes de Baumslag-Solitar généralisés
 - Définition
 - Décomposition du noyau parfait

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Décomposition du noyau parfait

L'action d'un GBS sur son arbre de Bass-Serre est un exemple typique d'action non acylindrique !

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Décomposition du noyau parfait

L'action d'un GBS sur son arbre de Bass-Serre est un exemple typique d'action non acylindrique !

Théorème (B., 2024)

Soit Γ un GBS non isomorphe à $BS(1, n)$. Soit $\mathcal{T}$ l'arbre de Bass-Serre associé à un graphe de groupes réduit de G . Alors

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \text{Sub}_\infty(\Gamma, \mathcal{T}).$$

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Décomposition du noyau parfait

L'action d'un GBS sur son arbre de Bass-Serre est un exemple typique d'action non acylindrique !

Théorème (B., 2024)

Soit Γ un GBS non isomorphe à $BS(1, n)$. Soit $\mathcal{T}$ l'arbre de Bass-Serre associé à un graphe de groupes réduit de G . Alors

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \text{Sub}_{\infty}(\Gamma, \mathcal{T}).$$

- généralisation des résultats de Carderi, Le Maître, Gaboriau, Stalder obtenus dans le cas des $BS(m, n)$ en 2022 ;

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Décomposition du noyau parfait

L'action d'un GBS sur son arbre de Bass-Serre est un exemple typique d'action non acylindrique !

Théorème (B., 2024)

Soit Γ un GBS non isomorphe à $BS(1, n)$. Soit $\mathcal{T}$ l'arbre de Bass-Serre associé à un graphe de groupes réduit de G . Alors

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \text{Sub}_\infty(\Gamma, \mathcal{T}).$$

- généralisation des résultats de Carderi, Le Maître, Gaboriau, Stalder obtenus dans le cas des $BS(m, n)$ en 2022 ;
- résultat qui rappelle celui de [AG23] sur le calcul du noyau parfait dans le cas d'une action acylindrique.

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Décomposition du noyau parfait

Théorème (B., 2024)

Soit Γ un GBS non isomorphe à $BS(1, n)$. Il existe une partition dénombrable Γ -invariante $\mathcal{K}(\Gamma) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}} \mathcal{K}_n$ telle que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la pièce $\mathcal{K}_n$ est ouverte (et fermée ssi Γ est virtuellement $\mathbb{F}_k \times \mathbb{Z}$ pour un certain k) ;
- $\mathcal{K}_\infty$ est fermée ;
- l'action par conjugaison de Γ sur $\mathcal{K}_n$ est topologiquement transitive pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Décomposition du noyau parfait

Théorème (B., 2024)

Soit Γ un GBS non isomorphe à $BS(1, n)$. Il existe une partition dénombrable Γ -invariante $\mathcal{K}(\Gamma) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}} \mathcal{K}_n$ telle que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la pièce $\mathcal{K}_n$ est ouverte (et fermée ssi Γ est virtuellement $\mathbb{F}_k \times \mathbb{Z}$ pour un certain k) ;
 - $\mathcal{K}_\infty$ est fermée ;
 - l'action par conjugaison de Γ sur $\mathcal{K}_n$ est topologiquement transitive pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.
-
- différence avec le cas acylindrique : l'existence de pièces ouvertes invariantes est une obstruction à la transitivité topologique sur $\mathcal{K}(\Gamma) = \text{Sub}_\infty(\Gamma, \mathcal{T})$.

Groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Décomposition du noyau parfait

Théorème (B., 2024)

Soit Γ un GBS non isomorphe à $BS(1, n)$. Il existe une partition dénombrable Γ -invariante $\mathcal{K}(\Gamma) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}} \mathcal{K}_n$ telle que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la pièce $\mathcal{K}_n$ est ouverte (et fermée ssi Γ est virtuellement $\mathbb{F}_k \times \mathbb{Z}$ pour un certain k) ;
 - $\mathcal{K}_\infty$ est fermée ;
 - l'action par conjugaison de Γ sur $\mathcal{K}_n$ est topologiquement transitive pour tout $n \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.
-
- différence avec le cas acylindrique : l'existence de pièces ouvertes invariantes est une obstruction à la transitivité topologique sur $\mathcal{K}(\Gamma) = \text{Sub}_\infty(\Gamma, \mathcal{T})$.
 - la partition est calculable à partir du graphe $\mathcal{H}_\Gamma$.