

GROUPE DE LECTURE : *FOUNDATIONS OF ERGODIC THEORY*, VIANA ET OLIVEIRA

À la mémoire de Claude Danthony.

1. PRÉSENTATION

Ce groupe de lecture vise à étudier le livre *Foundations of ergodic theory* de Marcelo Viana et Kjerfve Oliveira. L'objectif de la théorie ergodique est d'étudier des systèmes dynamiques qui possèdent une mesure invariante. Une motivation historique de cette théorie est l'étude des systèmes hamiltoniens en physique, qui préservent la mesure de Liouville. Cette invariance est liée à la conservation de l'énergie. Ce sont des exemples de systèmes en temps continu.

Dans ce cours, on s'intéressera aux systèmes dynamiques discrets, c'est-à-dire définis par une transformation mesurable $f : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$ (où (X, μ) est un espace de probabilité standard) qui préserve la mesure de probabilité μ . L'objet de notre étude est de comprendre l'évolution de ce système en temps long, c'est-à-dire le comportement de la suite des itérées f^n . Des exemples de tels systèmes incluent les shift de Bernoulli $\sigma : (\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{N}}) \rightarrow (\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{N}})$, où la transformation du boulanger (partant du carré $[0, 1]^2$ (la pâte du boulanger), la transformation consiste en étirer la pâte horizontalement (on obtient donc le rectangle $[0, 2] \times [0, \frac{1}{2}]$), la couper verticalement au milieu et mettre le morceau de droite au-dessus du morceau de gauche). Les développements en fractions continues fournissent également des exemples intéressants de tels systèmes dynamiques.

L'existence de **mesures invariantes** (garantie par des résultats de compacité sur des espaces de mesures), fournit des résultats puissants sur le système : à titre d'exemple, le **théorème de récurrence** de Poincaré affirme que presque toute orbite revient arbitrairement proche de son état initial. Ce résultat a des applications dans des théorèmes de progression arithmétique par exemple. Les **théorèmes ergodiques** permettent d'obtenir des résultats tout à fait surprenants sur la statistique de ces systèmes : le théorème ergodique de Birkhoff permet de montrer que la proportion de '7' dans l'écriture en fractions continues d'un élément de $[0, 1]$ est $\frac{1}{\log(2)} \frac{\log(64)}{\log(63)}$!

L'**ergodicité** est une propriété de "minimalité" du système. Intuitivement, un système ergodique est un système qu'on ne peut pas décomposer non trivialement en deux sous-systèmes invariants. Dans le formalisme du théorème de récurrence de Birkhoff,

c'est également un système pour lequel les moyennes spatiales et temporelles coïncident. D'autres façons de quantifier le "chaos" d'un système dynamique incluent la notion de **mélange** et d'**entropie**. Généralement, l'entropie n'est pas suffisante pour déterminer si deux systèmes sont équivalents, mais un théorème d'Ornstein affirme que c'est un invariant total pour les shifts de Bernoulli.

2. PRÉREQUIS

Théorie de la mesure, bases de topologie, espaces de Hilbert, bases de calcul différentiel (séance 12).

3. DESCRIPTIF DES SÉANCES

Le groupe de lecture s'articule en douze séances de 2h chacune. À chaque séance, deux élèves présentent un exposé de 45 minutes chacun.

3.1. Séance 1 : Mesures invariantes, récurrence de Poincaré.

- Exposé 1 : Définition des mesures invariantes, récurrence de Poincaré et version topologique (sections 1.1 et 1.2) ;
- Exposé 2 : Exemples et théorème de récurrence multiple (sections 1.3 (choisir des exemples en dehors de 1.3.2) et 1.5).

3.2. Séance 2 : Existence de mesures invariantes.

- Exposé 1 : Topologie faible * (section 2.1) ;
- Exposé 2 : Preuve du théorème d'existence. Application à la progression arithmétique (sections 2.2 et 2.4).

3.3. Séance 3 : Théorèmes ergodiques.

- Exposé 1 : Théorème ergodique de von Neumann (section 3.1 + application : montrer que pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n f(\cdot + n\alpha)$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt$) ;
- Exposé 2 : Théorème ergodique de Birkhoff (section 3.3).

3.4. Séance 4 : Ergodicité.

- Exposé 1 : Systèmes ergodiques (section 4.1) ;
- Exposé 2 : Applications (Exemples choisis dans la section 4.2, parmi lesquels l'exemple 4.2.4 et preuve de l'affirmation suivante : pour presque tout $x \in [0, 1]$, la proportion de '7' dans le développement en fractions continues de x est $\frac{1}{\log(2)} \frac{\log(63)}{\log(64)}$).

3.5. Séance 5 : Décomposition ergodique.

- Exposé 1 : Propriétés des mesures ergodiques (section 4.3) ;
- Exposé 2 : Théorème de décomposition ergodique (section 5.1, éventuellement 5.2).

3.6. Séance 6 : Unique ergodicité.

- Exposé 1 : Systèmes uniquement ergodiques et théorème de Weyl (sections 6.1 et 6.4) ;
- Exposé 2 : Mesure de Haar (section 6.3).

3.7. Séance 7 : Mélange.

- Exposé 1 : Systèmes mélangeants (section 7.1) ;
- Exposé 2 : Shifts de Markov (section 7.2).

3.8. Séance 8 : Equivalence ergodique.

- Exposé 1 : Equivalence ergodique (section 8.1) ;
- Exposé 2 : Equivalence spectrale (section 8.2).

3.9. Séance 9 : Entropie I.

- Exposé 1 : Définition de l'entropie (section 9.1) ;
- Exposé 2 : Théorème de Kolmogorov-Sinai (section 9.2).

3.10. Séance 10 : Entropie II.

- Exposé 1 : Exemples de calculs d'entropie (section 9.4) ;
- Exposé 2 : Entropie et équivalence ergodique (sections 9.5.1 et 9.5.2).

3.11. Séance 11 : Principe variationnel.

- Exposé 1 : Entropie topologique (section 10.1) ;
- Exposé 2 : Exemples de calcul (section 10.2).

3.12. Séance 12 : Applications dilatantes.

- Exposé 1 : Application dilatante sur une variété compacte. Existence et unicité d'une mesure invariante absolument continue (section 11.1) ;
- Exposé 2 : Aspects dynamiques des applications dilatantes (section 11.2).