

Exercices sur le chapitre 6

1. Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$.
2. Soit S une surface orientable dont le groupe fondamental est de type fini. On admet qu'une telle surface est homéomorphe à une surface compacte de genre g privée d'un nombre fini de points. Donner une présentation du groupe fondamental de S .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (i) Calculer le groupe fondamental de \mathbb{R}^2 privé de n points.
 - (ii) Calculer le groupe fondamental de \mathbb{S}^2 privée de n points.
4. (Groupe fondamental d'un complémentaire)
 - (i) Soient D_1 et D_2 deux droites distinctes de \mathbb{R}^3 . Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus D_1 \cup D_2$.
 - (ii) Calculer le groupe fondamental de \mathbb{R}^3 privé d'un cercle C .
5. Soit G un groupe de présentation finie. Construire un espace topologique de groupe fondamental G .
6. (Principe de Eckmann-Hilton)
 - (i) Soit X un ensemble équipé de deux lois $*$ et \bullet qui sont compatibles, c'est-à-dire que pour tous $x, y, x', y' \in X$ on a
$$(x \bullet x') * (y \bullet y') = (x * y) \bullet (x' * y')$$
et telles qu'il existe un élément $1 \in X$ neutre pour les deux lois. Montrer que les deux lois sont égales et définissent une structure de monoïde commutatif sur X .
 - (ii) Montrer que le groupe fondamental d'un groupe topologique est abélien.