Exercices sur le chapitre 5

1. (Racine n-ème et logarithme)

i) Soient X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs et f une fonction continue de X dans $\mathbb{C}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette une racine n-ème continue.

ii) Mêmes hypothèses qu'à la question précédente. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un logarithme continu.

iii) On suppose que $X = \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette une racine n-ème holomorphe. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un logarithme holomorphe. Faire le lien avec les questions précédentes.

2. (Théorème de Nielsen Schreier)

(i) Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe libre est libre.

(ii) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{F}_n$ d'indice fini. Montrer que G est un groupe libre de rang $1 + [\mathbb{F}_n : G](n-1)$.

(iii) Calculer le rang du sous-groupe de $\mathbb{F}_2$ engendré par $a^2b^{-1}, a^3b, a^{-1}b^2, aba, a^3b^{-2}a^{-1}$. Est-ce un sous-groupe d'indice fini ? Est-ce un sous-groupe normal ?

3. (Sous-groupes des groupes libres)

(i) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Montrer que $\mathbb{F}_2$ peut se réaliser comme sous groupe de $\mathbb{F}_n$. Peut-il être réalisé comme sous-groupe d'indice fini ?

(ii) Montrer que $\mathbb{F}_n$ peut se réaliser comme sous-groupe normal d'indice fini de $\mathbb{F}_2$.

(iii) Montrer qu'un sous-groupe normal et de type fini de $\mathbb{F}_2$ est trivial ou d'indice fini.

4. (Finitude résiduelle) Un groupe G est dit résiduellement fini ssi, pour tout élément g de G, il existe un groupe fini F et un morphisme $f : G \to H$ tel que $f(g) \neq 1$.

(i) Montrer que les groupes finis sont résiduellement finis.

(ii) Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe résiduellement fini est résiduellement fini.

(iii) Montrer que les groupes abéliens de type fini sont résiduellement finis.

(iv) Montrer que $GL_n(\mathbb{Z})$ est résiduellement fini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(v) Montrer que G est résiduellement fini ssi pour tout $g \in G$ différent de 1, il existe un sous-groupe H de G d'indice fini tel que $g \notin H$.

(vi) On suppose que $G = \pi_1(X, x)$ avec X connexe, localement connexe par arcs et semi localement simplement connexe (par exemple X localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, ou X CW-complexe (cette hypothèse sert à garantir que X possède un revêtement simplement connexe)). Montrer que G est résiduellement fini ssi pour tout lacet γ de X basé en x non homotopiquement trivial, il existe un revêtement galoisien fini $p : (\hat{X}, \hat{x}) \to (X, x)$ tel que γ se relève en un chemin $\hat{\gamma}$ de $\hat{X}$ vérifiant $\hat{\gamma}(0) = \hat{x}$ et qui n'est pas un lacet.

(vii) Montrer que $\mathbb{F}_n$ est résiduellement fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.