Exercices sur le chapitre 4

1. (Produit d'espaces)

i) Soient X et Y deux espaces topologiques. Montrer que $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

ii) Calculer le groupe fondamental du tore $\mathbb{T}^n$.

2. Calculer le groupe fondamental du ruban de Möbius.

3. Soit X un espace topologique. On définit le cône de X par le quotient : $C(X) = (X \times [0,1])/((x,1) \sim (y,1) \forall (x,y) \in X^2)$.

(i) Montrer que $C(X)$ est contractile.

(ii) Montrer que le cône de $\mathbb{S}^n$ est $\mathbb{B}^{n+1}$.

4. (Le retour des boucles d'oreilles hawaïennes)

(i) Montrer que l'espace $\mathcal{B}$ des boucles d'oreilles hawaïennes est localement connexe par arcs.

On dit qu'un espace topologique X est semi-localement simplement connexe si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que tout lacet de U est homotope à une constante dans X.

(ii) Montrer que $\mathcal{B}$ n'est pas semi-localement simplement connexe. En déduire qu'il ne possède pas de revêtement simplement connexe.

(iii) Montrer que $\pi_1(\mathcal{B})$ se surjecte sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

5. (Groupe fondamental d'un complémentaire)

(i) Soient D_1 et D_2 deux droites distinctes de $\mathbb{R}^3$. On veut calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus D_1 \cup D_2$.

a) On suppose que D_1 et D_2 ne s'intersectent pas. Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus D_1 \cup D_2$ est homotopiquement équivalent à $\mathbb{R}^2$ privé de deux points. Conclure.

b) On suppose que D_1 et D_2 sont sécantes. Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus D_1 \cup D_2$ est homotopiquement équivalent à $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\})$ où les x_i sont des points (distincts) de $\mathbb{S}^2$. Conclure.

(ii) Le but de cette question est de calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3$ privé d'un cercle C.

a) Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus C$ est homotopiquement équivalent à $\mathbb{S}^3 \setminus C' \cup \{x\}$ où C' est un cercle de $\mathbb{S}^3$ et x un point de $\mathbb{S}^3$ qui n'appartient pas à C'.

b) Montrer que $\mathbb{S}^3 \setminus C'$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R} \times \{0\}^2$.

c) Soit $n \geq 3$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x \in U$. Montrer que $\pi_1(U \setminus \{x\}) = \pi_1(U)$.

d) Conclure.