Exercices sur le chapitre 3

1. (i) Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes pour tout $n \neq 2$.

(ii) Généraliser à des espaces topologiques localement homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ pour $n \neq 2$.

2. (Produit d'espaces)

i) Soient X et Y deux espaces topologiques. Montrer que $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

ii) Calculer le groupe fondamental du tore $\mathbb{T}^n$.

3. Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{RP}^n$.

4. Calculer le groupe fondamental du ruban de Möbius.

5. Calculer le groupe fondamental du tore épointé.

6. (Autour des sphères)

(i) Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$.

(ii) Le but de cette question est de démontrer que $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe pour tout $n \geq 2$. Soient $n \geq 2$ et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ une fonction continue telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

a) Supposons que γ est non surjectif. Montrer que γ est homotope à une application constante.

b) On ne fait plus d'hypothèse sur γ et on veut montrer que γ est homotope à un lacet non surjectif. Soit $(U_1, ..., U_r)$ un recouvrement de $\mathbb{S}^n$ par des ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ (pourquoi un tel recouvrement existe ?)
Montrer qu'il existe une subdivision de $[0,1]$ en un nombre fini d'intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ tels que, pour tout i, l'image $\gamma([x_i, x_{i+1}])$ est entièrement contenue dans l'un des U_j. Conclure.

(iii) Le but de cette question est de démontrer que le sphères ne sont pas contractiles.

a) En admettant le théorème du point fixe de Brouwer, montrer le lemme de non rétraction : il n'existe pas d'application continue $r : \mathbb{B}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ telle que $r|_{\mathbb{S}^n} = id$.

b) En déduire que $\mathbb{S}^n$ n'est pas contractile.