

Exercices sur le chapitre 2

1.
 - (i) Faire la liste de tous les revêtements de degré 2 du bouquet de deux cercles. Lesquels sont galoisiens ?
 - (ii) Faire la liste de tous les revêtements de degré 3 du bouquet de deux cercles. Lesquels sont galoisiens ?
 - (iii) Montrer qu'un graphe fini connexe $\mathcal{G}$ possédant s sommets et a arêtes est homotope au bouquet de $1 - s + a$ cercles. En particulier, le groupe fondamental d'un graphe est un groupe libre.
 - (iv) Soient $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux graphes finis connexes tels qu'il existe un revêtement $p : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$. Donner le nombre de sommets et d'arêtes de $\mathcal{G}_1$ en fonction de $\mathcal{G}_2$.
 - (v) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, construire un revêtement galoisien d'un espace de groupe fondamental $\mathcal{F}_k$ sur le bouquet de deux cercles.
2. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe propre non constante.
 - (i) Montrer que les fibres de f sont finies.
 - (ii) Montrer que $f : \mathbb{C} \setminus f'^{-1}(\{0\}) \rightarrow f(\mathbb{C} \setminus f'^{-1}(\{0\}))$ est un revêtement.
 - (iii) Montrer que les polynômes non constants satisfont les hypothèses de l'énoncé et calculer les degrés des revêtements associés.
3. On définit la boucle d'oreille hawaienne $\mathcal{B}$ comme la réunion des cercles de $\mathbb{R}^2$ de centres $(\frac{1}{n}, 0)$ et de rayons $\frac{1}{n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
 - (i) Montrer que $\mathcal{B}$ est connexe par arcs et localement connexe par arcs.
 - (ii) Montrer que $\mathcal{B}$ n'est pas localement simplement connexe.
4. Le but de cet exercice est de classifier tous les revêtements connexes du cercle. Soit $p : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ un revêtement avec X un espace topologique connexe.
 - (i) Montrer que pour tout $x_0 \in X$ et t_0 vérifiant $\exp(2i\pi t_0) = p(x_0)$ il existe une unique application continue $f_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow X$ telle que $p \circ f_{x_0}(t) = \exp(2i\pi t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f_{x_0}(t_0) = x_0$ (on pourra utiliser le théorème de relèvement des homotopies).
 - (ii) Montrer que f_x est soit injective, soit périodique. Dans ce dernier cas, montrer que f_x possède une période minimale $d \in \mathbb{N}^*$.

- (iii) Justifier que f_x est une application ouverte.
- (iv) Montrer que pour tous $x, y \in X$, les images de f_x et f_y sont soit disjointes soit égales. En déduire que f_{x_0} est surjective pour un certain $x_0 \in X$.
- (v) Conclure dans le cas où f_{x_0} est injective que p est isomorphe au revêtement $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$.
- (vi) Montrer que p est isomorphe au revêtement de $\mathbb{S}^1$ sur lui-même donné par $z \rightarrow z^d$ si f_{x_0} est périodique de période minimale d .