Exercices sur le chapitre 1

1. (i) Montrer que les espaces $S^1, [0,1]/(0 \sim 1)$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont homéomorphes.

(ii) Si X_1 et X_2 sont deux espaces topologiques ayant des points distingués x_1, x_2, on définit $X_1 \vee_{x_1,x_2} X_2 = (X_1 \amalg X_2)/(x_1 \sim x_2)$.

a) Si X_1 et X_2 sont homogènes, c'est-à-dire si Homéo(X_i) agit transitivement sur X_i pour $i = 1, 2$, le type topologique de $X_1 \vee X_2$ ne dépend pas de x_1, x_2, on le note $X_1 \vee X_2$.

b) Donner des exemples d'espaces topologiques homogènes.

c) Si X est un espace topologique réunion de deux fermés X_1, X_2 avec $X_1 \cap X_2 = \{x\}$, montrer que X est homéomorphe à $X_1 \vee_{(x)_1,(x)_2} X_2$.

d) Montrer que $S^1 \vee S^1$ est homéomorphe à la lemniscate de Bernoulli $r^2 = \cos(2\theta)$.

2. On note $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le quotient de $\mathbb{R}$ par l'action de $\mathbb{Z}$ agissant par translations :

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}_{/\sim}\ ,\ t \sim t' \Leftrightarrow\ t - t' \in \mathbb{Z},$$

muni de la topologie quotient. On note $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection naturelle. On note aussi $p(t) = [t]$ (classe d'équivalence).

(i) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est séparé, puis qu'il est compact.

(ii) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $p(]t - 1/2, t + 1/2[)$ est un voisinage ouvert de $[t]$, qui ne dépend que de $[t]$. On le note $U_{[t]}$.

(iii) Montrer que $p^{-1}(U_{[t]})$ a un homéomorphisme Φ sur $U_{[t]} \times \mathbb{Z}$ tel que $p \circ \Phi = p$, et en déduire que p est un revêtement de fibre $\mathbb{Z}$.

(iv) Montrer que p est galoisien de groupe $\mathbb{Z}$.

(v) On note $q : \mathbb{R} \to S^1$ l'application $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Montrer que q passe au quotient pour donner un homéomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$.

(vi) Montrer que q est un revêtement isomorphe à p, donc galoisien de groupe $\mathbb{Z}$.

(vii) Montrer que $p : z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}^*$ est un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}$, agissant par translations $z \mapsto z + 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Soit G un groupe topologique et soit $H \leq G$ un sous-groupe discret. On munit G/H de la topologie quotient. Montrer que la projection $G \to G/H$ est un revêtement.

4. (i) Rappeler pourquoi un revêtement est un homéomorphisme local. Donner un exemple d'homéomorphisme local qui n'est pas un revêtement.

(ii) Montrer qu'un homéomorphisme local propre est un revêtement.

5. Pour $n \geq 1$, on définit l'espace projectif $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ où $\mathbb{R}^*$ agit par homothéties.

(i) Noter que si $t \in \mathbb{R}^*$, $tS^{n-1} \cap S^{n-1} \neq \emptyset \Leftrightarrow t = \pm 1$, donc on a une injection $i_n : S^n/\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\} \to \mathbb{RP}^n$. Montrer que c'est une bijection et un homéomorphisme. Donc on peut identifier $\mathbb{RP}^n = S^n/\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$.

(ii) Montrer que la projection $p_n : S^n \to \mathbb{RP}^n$ est un revêtement de degré deux.

(iii) Montrer que $\mathbb{RP}^1$ est homéomorphe à S^1 et que p_1 est isomorphe au revêtement $q_2(z) = z^2$ de S^1 sur lui-même, c'est-à-dire qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p_1"'] & S^1 \arrow[d, "q_2"] \\ \mathbb{RP}^1 \arrow[r, "\varphi"] & S^1 \end{tikzcd}$$

où φ et Φ sont des homéomorphismes.

(iv) Soit $D \subset S^2$ un « petit » disque ouvert autour du pôle nord, disons $D = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > \frac{1}{2}\}$. Montrer que $M := p_2(S^2 \setminus (D \cup (-D))$ est homéomorphe au ruban de Möbius.
Indication : On pourra montrer que le ruban de Möbius est homéomorphe au quotient du cylindre $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ *par la relation d'équivalence* $(z, t) \simeq (-z, -t)$ *pour tout* $(z, t) \in \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$.

(v) *Montrer que $\mathbb{RP}^2$ est homéomorphe à $(M \amalg \overline{D}^2)/\sim$, où l'équivalence est donnée par un homéomorphisme de $\partial D^2 = S^1$ sur $\partial M = p(\partial D)$. Donc $\mathbb{RP}^2$ s'obtient en recollant un disque et un ruban de Möbius sur leur bord.

(vi) Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est homéomorphe à $\overline{D}^n/\sim$ où l'équivalence est donnée par $-\mathrm{Id} : S^{n-1} \to S^{n-1}$.

(vii) Soit $F : \overline{D}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ l'application telle que $F(v)$ est la rotation d'axe $\frac{v}{||v||}$ et d'angle $||v||$ si $v \neq 0$, avec $F(0) = \mathrm{Id}$. Montrer que F est continue et induit un homéomorphisme $f : \overline{D}^3/\sim \to \mathrm{SO}(3)$ où l'équivalence est celle de la question précédente. En déduire que $\mathbb{RP}^3$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(3)$.

(viii) On définit l'application $p : S^3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ de la façon suivante par

$$p(\cos\theta, \sin\theta v) = r_{v,2\theta},$$

où $v \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ et $r_{v,2\theta}$ est la rotation d'axe v et d'angle 2θ. Montrer que p est bien définie et est un revêtement de degré deux.

Remarque. Si l'on identifie S^3 à

$$\mathrm{SU}(2) = \{\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\},$$

p est un morphisme de groupes, qui est le paramétrage d'une rotation par un quaternion unitaire.

6. (i) Si $p : \widehat{X} \to X$ est un revêtement et si X est séparé, montrer que $\widehat{X}$ est séparé.

(ii) Soient $\widehat{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $G = \mathbb{Z}$ agissant par $n.(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$, et $X = \mathbb{Z}\backslash\widehat{X}$. Montrer que l'action est proprement discontinue, c'est-à-dire que tout point $(x,y) \in \widehat{X}$ a un voisinage U tel que $n.U \cap U = \emptyset$ si $n \neq 0$. En déduire que la projection $p : \widehat{X} \to X = \widehat{X}/G$ est un revêtement.

(iii) On garde les notations de (ii). Montrer que $\widehat{X}$ est séparé mais X n'est pas séparé.

7. Soit X un espace localement compact muni d'une action d'un groupe G. Montrer que celle-ci est proprement discontinue si et seulement si elle est propre et libre, c'est-à-dire

- Pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble

  $$G(K,K) := \{g \in K \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$$

  est fini.
- Tout $g \in G \setminus 1_G$ agit sans point fixe.

8. Soit d un entier > 1. On définit T_d, *l'arbre de degré (ou valence) d*, de la façon suivante : c'est le graphe tel que

- les sommets sont les suites finies

  $$(i_1, i_2 \cdots, i_n) \in \{1, \cdots, d\}^n \ , \ n \in \mathbb{N},$$

  telles que

  $$(\forall k = 1, \cdots, n-1) \ i_k \neq i_{k+1}.$$

  Si $n = 0$, on a la suite vide, qu'on notera v_0.

- il y a une arête joignant $(i_1, i_2 \cdots, i_n)$ et $(i_1, i_2 \cdots, i_n, i_{n+1})$ pour tout sommet $(i_1, i_2 \cdots, i_n, i_{n+1}) \neq v_0$.

Sa topologie est la topologie quotient de $(\coprod_{(i_1,i_2\cdots,i_n)} [0,1]_{(i_1,i_2\cdots,i_n)})_{/\sim}$, où l'on identifie $1_{(i_1,i_2\cdots,i_n)}$ et $0_{(i_1,i_2\cdots,i_n,i_{n+1})}$. On admettra qu'elle est définie par la distance de longueur pour laquelle chaque arête a longueur un.

(i) Que vaut T_2 ?

(ii) Dessiner (des morceaux de) T_3, T_4.

(iii) Montrer que T_d est un *arbre*, c'est-à-dire n'a pas de cycles.

(iv) Montrer que tout sommet de T_d a un degré (ou valence) d, c'est-à-dire qu'il est une extrémité d'exactement d arêtes.

(v) Un isomorphisme entre deux graphes $\Gamma; \Gamma'$ est une bijection $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ qui envoie sommet sur sommet et est isométrique sur chaque arête (φ est donc déterminé par son action sur les sommets). Si $\Gamma = \Gamma'$, c'est un automorphisme de Γ. Montrer que φ préserve la distance, donc est un homéomorphisme. Donc $\mathrm{Aut}(T_d)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Homéo}(T_d)$.

(vi) Si T est un arbre où tout sommet a degré d, T est isomorphe à T_d. Mieux : si v est un sommet de T, il existe un isomorphisme $\varphi : T \to T_d$ tel que $\varphi(v) = v_0$. En déduire que $\mathrm{Aut}(T_d)$ est transitif sur les sommets de T_d.

(vii) *Construire un isomorphisme de groupes du stabilisateur $(\mathrm{Aut}(T_d))_{v_0}$ sur $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_{d-1}^{\mathbb{N}^*}$.

(viii) Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(T_d)$ agissant sans point fixe. Montrer que le sous-groupe $\langle\varphi\rangle \leq \mathrm{Aut}(T_d)$ agit de façon proprement discontinue, donc que la projection $T_d \mapsto T_d/\langle\varphi\rangle$ est un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}$.

(ix) Donner des exemples de tels automorphismes, et dessiner le quotient.

On suppose maintenant $d = 4$ (en fait, d pair > 2 marche aussi, mais complique les notations). On renomme les sommets de T_4 sous la forme de suites finies (appelés *mots*)

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}^n \ , \ n \in \mathbb{N},$$

qui sont *réduites* c'est-à-dire telles que

$$(\forall k = 1, \cdots, n) \ (x_k, x_{k+1}) \notin \{(a, a^{-1}), (a^{-1}, a), (b, b^{-1}), (b^{-1}, b)\}.$$

avec une arête entre $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$.

(x) Montrer que l'on obtient bien ainsi un arbre de valence d (on pourra se contenter de faire un dessin)

(xi) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(T_4)$ tel que

$$\alpha(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} (a, x_1, \cdots, x_n) \text{ si } x_1 \neq a^{-1} \\ (x_2, \cdots, x_n) \text{ si } x_1 = a^{-1}. \end{cases}$$

On définit de même $\beta \in \mathrm{Aut}(T_4)$ en remplaçant a par b.

(xii) Soit G le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T_4)$ engendré par a, b. Donc tout élément de G est un produit $g_v = \xi_1 \cdots \xi_n$ associé à un sommet $w = (x_1, \cdots, x_n)$, avec

$$x_i = a^{\pm 1} \Rightarrow \xi_i = \alpha^{\pm 1} \ , \ x_i = b^{\pm 1} \Rightarrow \xi_i = \beta^{\pm 1}.$$

Montrer que si $v \neq v_0$ (soit $n > 0$), on a $g_v.v = v$, et en particulier $g_v \neq \mathrm{Id}$ (on dit que G est *le groupe libre à deux générateurs*).

(xiii) Montrer que G vérifie l'hypothèse de l'exercice 2, et en déduire que l'application $T_4 \to T_4/G$ est un revêtement galoisien de groupe G.

(xiv) Montrer que T_4/G est homéomorphe au recollement de deux cercles en un point (figure ∞).